

**AO 102**

**Systèmes Dynamiques  
Stabilité et Commande**

**Cours et exercices corrigés  
Édition 2011/2012**

**Frédéric JEAN**



---

# Table des matières

<b>Avant-propos</b> .....	VII
<b>1 Calcul différentiel</b> .....	1
1.1 Applications différentiables .....	1
1.2 Accroissements finis .....	5
1.3 Dérivées d'ordres supérieurs .....	8
1.4 Inversion locale et fonctions implicites .....	10
1.5 Et en dimension infinie? .....	14
1.6 Exercices corrigés .....	15
<b>2 Équations différentielles linéaires autonomes</b> .....	25
2.1 Approche élémentaire .....	25
2.2 Exponentielle de matrices .....	27
2.3 Calcul de l'exponentielle de matrices .....	29
2.4 Forme des solutions .....	36
2.5 Exercices corrigés .....	42
<b>3 Équations différentielles linéaires</b> .....	59
3.1 Existence et unicité globales .....	59
3.2 La résolvante .....	61
3.3 Quelques propriétés de la résolvante .....	63
3.4 Équations affines .....	68
3.5 Équations linéaires périodiques .....	69
3.6 Exercices corrigés .....	72
<b>4 Théorie générale des équations différentielles</b> .....	81
4.1 Existence et unicité .....	82
4.2 Solutions maximales et durée de vie .....	84
4.3 Flots, portraits de phase .....	88

4.4	Linéarisation et perturbation du flot	91
4.5	Exercices corrigés	99
<b>5</b>	<b>Stabilité des équilibres</b>	117
5.1	Équilibres et stabilité	117
5.2	La stabilité par la linéarisation	119
5.3	Fonctions de Lyapunov	123
5.4	Exercices corrigés	128
<b>6</b>	<b>Commande des systèmes</b>	143
6.1	Systèmes commandés	143
6.2	Linéarisation des systèmes	145
6.3	Commandabilité (relation entrée/état)	148
6.4	Observabilité (relation état/sortie)	152
6.5	Stabilisation	154
6.6	Exercices corrigés	156
<b>A</b>	<b>Espaces vectoriels normés et théorèmes du point fixe</b>	173
A.1	Topologie des espaces métriques	173
A.2	Espaces vectoriels normés	174
A.3	Théorèmes du Point Fixe	175
A.4	Conséquence pour l'inversion locale et les fonctions implicites	177
<b>B</b>	<b>Forme normale des systèmes commandables</b>	181
B.1	Équations différentielles scalaires d'ordre $n$	181
B.2	Forme normale : cas $m = 1$	184
B.3	Forme normale : cas général	186
B.4	Démonstration du théorème 6.7	188
	<b>Bibliographie</b>	191
	<b>Index</b>	193

---

## Avant-propos

Les systèmes dynamiques sont les notions mathématiques qui permettent de modéliser des phénomènes évoluant dans le temps, ces phénomènes pouvant provenir de la physique, la mécanique, l'économie, la biologie, l'écologie, la chimie... Un système dynamique est constitué d'un espace de phases, l'espace des états possibles du phénomène convenablement paramétré, muni d'une loi d'évolution qui décrit la variation temporelle de l'état du système. Dans le cadre choisi ici, celui de lois déterministes en temps continu, cette loi d'évolution prend la forme d'une équation différentielle.

La résolution explicite, ou même approchée, d'une équation différentielle est en général impossible, les méthodes numériques permettant seulement de calculer sur un intervalle de temps fini une solution correspondant à des conditions initiales données. La théorie vise donc plutôt une étude qualitative des phénomènes et cherche en particulier à en comprendre l'évolution à long terme.

Le cours « Systèmes Dynamiques: Stabilité et Commande » a deux objectifs. Le premier est d'aborder l'étude générale des systèmes dynamiques régis par des équations différentielles ordinaires. L'accent est mis principalement sur la notion de stabilité dont l'importance, pour de nombreux problèmes pratiques, est comparable à celle de la connaissance effective des solutions.

Le deuxième objectif est de présenter une introduction à la commande des systèmes dynamiques, c'est-à-dire à l'automatique. Il s'agit en particulier d'étudier, dans le cadre de l'automatique linéaire, les notions essentielles que sont la commandabilité, l'observabilité et la stabilisation.

Chaque chapitre est constitué d'une part de notes de cours et d'autre part d'exercices suivis de leurs corrigés. Les deux parties sont d'égale importance. En effet, les notes de cours sont volontairement rédigées dans un style assez théorique, les exemples et les applications étant présentés dans les exercices. Ceux-ci contiennent aussi beaucoup de méthodes classiques d'analyse des systèmes dynamiques ainsi qu'un certain nombre de résultats annexes.

À quelques exceptions près, les résultats sont accompagnés de leur preuve. Lorsque celle-ci n'est pas utile à la compréhension du cours ou est trop difficile, elle est précédée du symbole \*. Le même traitement (symbole \*) est appliqué aux parties les plus avancées du document, qui peuvent être ignorées lors d'une première lecture.

Le plan de cet ouvrage est le suivant.

Le chapitre 1 est consacré au calcul différentiel : application linéaire tangente, théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites... Ces concepts sont nécessaires pour la partie du cours qui concerne la linéarisation, mais leur utilité dépasse largement le cadre des équations différentielles.

Une deuxième partie traite des équations différentielles ordinaires linéaires, autonomes dans un premier temps (chapitre 2), puis non autonomes (chapitre 3). Cette partie permet d'aborder dans un cadre plus simple des thèmes importants pour la suite : étude des portraits de phase et du comportement asymptotique des solutions, ainsi qu'exponentielle de matrice et résolvante, qui préfigurent la notion de flot.

L'étude de la stabilité des équations différentielles ordinaires non linéaires fait l'objet d'une troisième partie. On commence par présenter au chapitre 4 les éléments fondamentaux de la théorie générale des équations différentielles, puis le chapitre 5 est consacré à l'étude de la stabilité des équilibres. On montre en particulier comment celle-ci peut se réduire dans certains cas à l'étude de la stabilité des équations différentielles ordinaires linéaires, à l'aide d'une technique dite de linéarisation.

Enfin, le chapitre 6 présente une introduction à l'automatique. On y voit d'abord comment se ramener, par linéarisation à des systèmes commandés linéaires, puis on aborde, dans le cadre de l'automatique linéaire, les problèmes de l'analyse du comportement dynamique d'un système et de la synthèse des lois de commande. Deux annexes viennent compléter cet ouvrage, l'une comprenant des rappels et précisions sur les espaces de Banach, l'autre traitant des équations différentielles d'ordre supérieur à un et de leur lien avec la notion de commandabilité.

Cette organisation est un peu différente de celle de l'enseignement (cours magistraux et petites classes) tel qu'il sera donné cette année, les séances de cours étant réparties de la façon suivante :

1. calcul différentiel (chapitre 1),
2. théorie générale des équations différentielles (sections 4.1, 4.2 et 4.3),
3. équations linéaires autonomes (chapitre 2),
4. linéarisation et équations linéaires non-autonomes (section 4.4 et chapitre 3),
5. stabilité (chapitre 5),
6. commande des systèmes (chapitre 6).

Le contenu en est cependant le même et on espère que ces deux façons différentes d'aborder le sujet en faciliteront la compréhension.

Enfin, ce cours a été créé à l'ENSTA il y a plus de 10 ans par Raphaël Krikorian sous le titre « Linéarisation et stabilité des équations différentielles ». Le présent document doit beaucoup à celui qu'il avait rédigé, et je l'en remercie. De nombreux chargés de travaux dirigés ont participé tout au long de ces années à cet enseignement, chacun y ayant apporté des améliorations. Je leur en suis très reconnaissant, tout particulièrement au premier d'entre eux, Jérôme Perez, qui a proposé nombre d'exercices de cet ouvrage, et aux derniers arrivés, Maxence Cassier, Nicolas Chaulet et Zhiping Rao, qui ont effectué un gros travail de relecture et de correction.





---

## Calcul différentiel

Pour simplifier l'exposé, nous avons choisi de présenter les principales notions du calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie. Tout au long de ce chapitre, les espaces vectoriels (notés  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ) que nous considérerons seront donc supposés de dimension finie. Nous expliquerons cependant à la fin du chapitre, dans la section 1.5, comment étendre ces outils à un cadre plus général, celui des espaces de Banach.

Ce chapitre (et ceux qui suivent!) nécessite quelques connaissances de topologie (normes, continuité, ...). Nous avons choisi de les regrouper en annexe dans les sections A.1 et A.2.

### 1.1 Applications différentiables

Dans tout ce qui suit,  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de dimension finie,  $U \subset E$  est un ouvert de  $E$ ,  $a \in U$  est un point et  $f : U \subset E \rightarrow F$  est une application.

**Définition 1.1.** *Nous dirons que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire  $L_a : E \rightarrow F$  telle que, pour tout  $v$  vérifiant  $a + v \in U$ , on ait :*

$$f(a + v) = f(a) + L_a(v) + \|v\|\varepsilon(v),$$

où  $\lim_{v \rightarrow 0} \|\varepsilon(v)\| = 0$  (on notera alors  $\|v\|\varepsilon(v) = o(\|v\|)$ ).

Si elle existe, l'application linéaire  $L_a$  est unique (exercice : vérifiez-le). On l'appelle la *différentielle de  $f$  en  $a$*  – ou l'application linéaire tangente à  $f$  en  $a$  – et on note  $L_a = Df(a)$ .

Insistons sur le fait que la différentielle est une application linéaire  $Df(a) : E \rightarrow F$ . C'est donc un élément de  $L(E, F)$ , l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ , qui est un espace vectoriel de dimension finie. Nous noterons  $Df(a) \cdot v$  l'image de

$v \in E$  par cette application; cette expression  $Df(a) \cdot v$  se lit donc « la différentielle de  $f$  au point  $a$  appliquée au vecteur  $v$  ».

*Remarque 1.1.* Une application différentiable en  $a$  est également continue en  $a$ . C'est une conséquence directe de la définition ci-dessus et de la continuité des applications linéaires en dimension finie (voir à ce propos la section 1.5).

Donnons quelques cas importants de calcul de différentielle.

- Fonction réelle de la variable réelle. Pour une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la dérivée usuelle est définie comme

$$f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

ce qui est équivalent à l'existence du développement limité

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + hf'(t_0) + o(h).$$

Ainsi, dans ce cas, différentiable équivaut à dérivable et la différentielle est l'application linéaire  $Df(t_0) : h \mapsto hf'(t_0)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . La dérivée s'obtient à partir de la différentielle par  $f'(t_0) = Df(t_0) \cdot 1$ .

- Fonction vectorielle de la variable réelle. Considérons maintenant une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow F$ . Comme dans l'exemple précédent, la division par  $h$  est possible. La différentiabilité de  $f$  en  $t_0$  équivaut à l'existence de la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0) \in F,$$

(*vecteur dérivé* ou *vecteur vitesse* de  $f$  en  $t_0$ ), et la différentielle  $Df(t_0)$  est l'application linéaire  $h \mapsto hf'(t_0)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $F$ . On a aussi  $f'(t_0) = Df(t_0) \cdot 1$ .

- Les applications linéaires. Si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire, sa différentielle en tout point  $a \in E$  est égale à elle-même :  $Df(a) = f$ . En effet, par linéarité,  $f(a + v) = f(a) + f(v)$ .
- Différentielle de l'inverse. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi : GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto M^{-1}, \end{aligned}$$

où  $M_n(\mathbb{R})$  est l'espace vectoriel des matrices carrées  $n \times n$  à coefficients réels et  $GL_n(\mathbb{R})$  le sous-ensemble des matrices inversibles. Rappelons que  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $M_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ . On cherche à calculer  $\Phi(M + H) = (M + H)^{-1}$ , pour une matrice  $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  assez petite. Remarquons d'abord que

$$M + H = M(I + M^{-1}H),$$

et que si  $\|M^{-1}H\| < 1$ , la série

$$K = I - (M^{-1}H) + (M^{-1}H)^2 + \dots + (-1)^n (M^{-1}H)^n + \dots$$

est convergente et converge vers  $(I + M^{-1}H)^{-1}$ . On a de plus l'identité  $K = I - (M^{-1}H) + (M^{-1}H)^2 K$ . Ainsi, pour  $H$  suffisamment petit,

$$\begin{aligned} (M + H)^{-1} &= KM^{-1} \\ &= (I - (M^{-1}H) + (M^{-1}H)^2 K)M^{-1} \\ &= M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + o(\|H\|). \end{aligned}$$

L'application  $\Phi$  est donc différentiable en toute matrice  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  et sa différentielle est l'application

$$D\Phi(M) \cdot H = -M^{-1}HM^{-1}.$$

### Dérivées partielles.

Si  $f$  est différentiable en  $a$  et si  $v$  est un vecteur de  $E$ , on a

$$Df(a) \cdot v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

$t$  étant une variable réelle (il suffit d'écrire le développement limité de  $f$  en  $a + tv$ ). Ainsi  $Df(a) \cdot v$  est égal au vecteur vitesse  $\frac{d}{dt}f(a + tv)|_{t=0}$ , appelé *dérivée directionnelle* de  $f$  en  $a$  dans la direction  $v$ .

En particulier, si l'espace de départ est  $E = \mathbb{R}^n$  muni de la base canonique  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , la différentiabilité entraîne l'existence des *dérivées partielles* :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := Df(a) \cdot e_i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a)}{t} \in F,$$

avec  $i = 1, \dots, n$  (on utilisera aussi la notation  $\partial_{x_i}$  pour  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ). La différentielle s'écrit alors, par linéarité,

$$Df(a) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i \in F.$$

**Attention :** l'existence des dérivées partielles de  $f$  en  $a$  n'implique pas forcément la différentiabilité. Un exemple classique est la fonction :

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ si } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0,$$

qui admet des dérivées partielles nulles à l'origine, mais qui n'est pas différentiable en ce point car elle n'y est pas continue (considérer par exemple  $f(s, s)$  quand  $s \rightarrow 0$ ). On verra dans la proposition 1.3 qu'il faut ajouter une hypothèse de continuité pour obtenir la différentiabilité à partir de l'existence des dérivées partielles.

Considérons maintenant le cas  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}^p$ , l'application  $f$  s'écrivant alors  $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$ . La différentielle  $Df(a)$  est une application linéaire de  $E = \mathbb{R}^n$  dans  $F = \mathbb{R}^p$  et peut donc s'identifier, dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$ , à une matrice réelle ( $p \times n$ ). Notons que pour un vecteur  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  on a :

$$Df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^n Df_i(a) \cdot e_j h_j \right) e_i = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) h_j \right) e_i.$$

Ainsi la différentielle  $Df(a)$  s'identifie à la *matrice jacobienne*

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

### Propriétés élémentaires.

**Linéarité** Soient  $f$  et  $g$  des applications de  $U \subset E$  dans  $F$  et  $\lambda$  un réel. Si  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a \in U$ , alors  $f + g$  et  $\lambda f$  sont différentiables en  $a$  et

$$D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a), \quad D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a)$$

(il suffit d'appliquer la définition pour le montrer).

**Règle de Leibniz** Soient  $f$  et  $g$  des applications de  $U \subset E$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a \in U$ , alors le produit  $fg$  est différentiable en  $a$  et

$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$$

(il suffit là aussi d'appliquer la définition).

**Composition** Considérons deux applications  $f : U \subset E \rightarrow F$  et  $g : V \subset F \rightarrow G$ , où  $E, F, G$  sont des espaces vectoriels de dimension finie et  $U \subset E$  et  $V \subset F$  des ouverts. On suppose que  $a \in U$  est un point tel que  $f(a) \in V$ . L'application composée  $g \circ f$  est donc définie en  $a$ .

**Proposition 1.1.** *Si  $f$  est différentiable en  $a$  et  $g$  est différentiable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

En particulier, quand  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $F = \mathbb{R}^p$  et  $G = \mathbb{R}^m$ , la matrice jacobienne de  $g \circ f$  est le produit matriciel de celles de  $g$  et de  $f$ .

**Démonstration.** Pour tout  $v$  assez petit, écrivons  $f(a + v) = f(a) + w$ , avec  $w = Df(a) \cdot v + o(\|v\|)$ . On a alors,

$$\begin{aligned} g(f(a + v)) - g(f(a)) &= Dg(f(a)) \cdot w + o(\|w\|) \\ &= Dg(f(a)) \cdot (Df(a) \cdot v) + \text{un reste.} \end{aligned}$$

Le reste est la somme de termes  $o(\|w\|)$  et  $Dg(f(a)) \cdot o(\|v\|)$ , qui sont tous des  $o(\|v\|)$  (vérifiez-le). La proposition est donc démontrée.

□

## Applications de classe $C^1$ .

Si  $f$  est différentiable en tout point  $a$  de  $V \subset U$ , nous dirons que  $f$  est *différentiable sur  $V$* . Dans ce cas, on peut définir la différentielle de  $f$  sur  $V$  comme l'application :

$$\begin{aligned} Df : V &\longrightarrow L(E, F) \\ x &\longmapsto Df(x). \end{aligned}$$

**Définition 1.2.** *Nous dirons que  $f$  est de classe  $C^1$  en  $a$  si elle est différentiable sur un voisinage  $V$  de  $a$  et si l'application  $Df : V \rightarrow L(E, F)$  est continue en  $a$ .*

## 1.2 Accroissements finis

**Théorème 1.1 (des accroissements finis).** *Soient  $f : U \subset E \rightarrow F$  une application différentiable sur l'ouvert  $U$  et  $a, b$  deux points de  $U$  tels que le segment  $[a, b] = \{ta + (1 - t)b, t \in [0, 1]\}$  est inclus dans  $U$ . Alors,*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \left( \sup_{x \in [a, b]} \|Df(x)\| \right) \|b - a\|.$$

Il faut faire attention ici à l'ambiguïté des notations de norme : la norme de  $b - a$  est une norme  $\|\cdot\|_E$  sur  $E$ , la norme de  $f(b) - f(a)$  est une norme  $\|\cdot\|_F$  sur  $F$  et la norme utilisée pour  $Df(x)$  est la norme d'opérateurs  $\|\cdot\|_{E,F}$  définie à partir des précédentes (voir la section A.2), c'est-à-dire,

$$\|Df(x)\| = \sup_{\substack{v \in E \\ v \neq 0}} \frac{\|Df(x) \cdot v\|_F}{\|v\|_E}.$$

**\*Démonstration.** Notons  $M = \sup_{x \in [a,b]} \|Df(x)\|$  et supposons  $M < \infty$  (sinon la conclusion du théorème est triviale). Soit en outre  $\epsilon > 0$  et posons

$$A_\epsilon = \{t \in [0, 1] : \|f(a + t(b - a)) - f(a)\| \leq (M + \epsilon)t\|b - a\|\}.$$

L'ensemble  $A_\epsilon$  est fermé (puisque  $f$  est continue) contient 0 et, étant borné, il est compact. Notons  $t_0$  son plus grand élément qui, comme  $A_\epsilon$  est compact, appartient à  $A_\epsilon$ .

▷ Supposons par l'absurde que  $t_0 < 1$ ; on a alors

$$\|f(a + t_0(b - a)) - f(a)\| \leq (M + \epsilon)t_0\|b - a\|.$$

Par ailleurs, d'après la définition de  $t_0$  il existe une suite  $t_n > t_0$  d'éléments n'appartenant pas à  $A_\epsilon$  qui converge vers  $t_0$ , c'est-à-dire,

$$\|f(a + t_n(b - a)) - f(a)\| > (M + \epsilon)t_n\|b - a\|.$$

Ces deux inégalités nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} (M + \epsilon)(t_n - t_0)\|b - a\| &< \|f(a + t_n(b - a)) - f(a)\| - \|f(a + t_0(b - a)) - f(a)\| \\ &\leq \|f(a + t_n(b - a)) - f(a + t_0(b - a))\|, \end{aligned}$$

soit

$$M + \epsilon < \frac{\|f(a + t_n(b - a)) - f(a + t_0(b - a))\|}{(t_n - t_0)\|b - a\|},$$

et, en faisant tendre  $n$  vers l'infini,

$$M + \epsilon \leq \frac{\|Df(a + t_0(b - a)) \cdot (b - a)\|}{\|b - a\|},$$

ce qui contredit la définition de  $M$ .

▷ Par conséquent pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $A_\epsilon = [0, 1]$ . Si on fait à présent tendre  $\epsilon$  vers 0 on obtient la conclusion du théorème.  $\square$

*Remarque 1.2.*

- **Attention :** à la différence des applications à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , il n'existe pas toujours un point  $c \in ]a, b[$  pour lequel  $f(b) - f(a) = Df(c) \cdot (b - a)$ . Prendre par exemple  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (\cos t, \sin t)$  avec  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$ .

- On peut donner des versions plus générales de ce théorème. Signalons par exemple celle-ci : *supposons qu'il existe  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que pour tout  $t \in [0, 1]$  on ait*

$$\|Df(a + t(b - a)) \cdot (b - a)\| \leq \phi'(t).$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \phi(1) - \phi(0).$$

La démonstration de ce fait s'effectue de la même manière que précédemment.

### Conséquences des accroissements finis.

Les résultats suivants sont des conséquences utiles du théorème des accroissements finis.

**Proposition 1.2.** *Si  $f : U \subset E \rightarrow F$  est de classe  $C^1$ , alors  $f$  est lipschitzienne sur toute boule fermée contenue dans  $U$ .*

**Démonstration.** Soit  $B$  une boule fermée contenue dans  $U$ . L'application  $Df$  étant continue,  $\|Df(x)\|$  est bornée par une constante  $k$  sur  $B$ . Prenons alors deux points quelconques  $x$  et  $y$  dans  $B$ . Le segment  $[x, y]$  est contenu dans  $B$ , puisque toute boule est convexe, et le théorème des accroissements finis s'applique. Ainsi, pour tous  $x, y \in B$ ,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq k \|y - x\|.$$

□

*Remarque 1.3.* On montre de façon similaire que, si  $f : E \rightarrow E$  est différentiable sur  $E$  et si  $\|Df(x)\| \leq \rho < 1$  pour tout  $x \in E$ , alors  $f$  est  $\rho$ -contractante.

**Proposition 1.3.** *Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$  et  $a \in U$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $f$  est  $C^1$  en  $a \in U$ ;
- (ii) les dérivées partielles de  $f$  existent et sont continues en  $a$ .

**\*Démonstration.**

Le fait que (i) implique (ii) est clair. Montrons l'implication inverse dans le cas où  $n = 2$  (le cas général s'effectuant de la même manière). On a, au point  $a = (a_1, a_2)$ ,

$$\begin{aligned} & \|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a) - \partial_{x_1} f(a)h_1 - \partial_{x_2} f(a)h_2\| \leq \\ & \|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - \partial_{x_2} f(a)h_2\| + \|f(a_1 + h_1, a_2) - f(a) - \partial_{x_1} f(a)h_1\|, \end{aligned}$$

où on a noté  $\partial_{x_i} f$  la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x_i$ . Du fait de l'existence de la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x_1$  en  $a$  on a déjà :

$$\|f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) - \partial_{x_1} f(a_1, a_2)h_1\| = o(\|h_1\|).$$

▷ Par ailleurs l'application  $g$  définie dans un voisinage de 0 par

$$g(h) = f(a_1 + h_1, a_2 + h) - f(a_1 + h_1, a_2) - \partial_{x_2} f(a)h,$$

est différentiable sur un voisinage de 0 et vérifie

$$Dg(h) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2 + h) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \epsilon(|h_1| + |h|),$$

où, puisque  $\partial_{x_2} f$  est continue,  $\epsilon(s)$  tend vers 0 avec  $s$ . On a donc, en appliquant le théorème des accroissements finis à  $g$  entre 0 et  $h_2$ ,

$$\|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - \partial_{x_2} f(a)h_2\| \leq |h_2| \epsilon(|h_1| + |h_2|).$$

▷ Au total,

$$\begin{aligned} \|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a) - \partial_{x_1} f(a)h_1 - \partial_{x_2} f(a)h_2\| \\ \leq |h_2| \epsilon(|h_1| + |h_2|) + o(|h_1|) = o(|h_1| + |h_2|), \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème. □

### 1.3 Dérivées d'ordres supérieurs

Rappelons que, si  $f : E \rightarrow F$  est différentiable sur  $U$ , on peut définir l'application

$$\begin{aligned} Df : U \subset E &\rightarrow L(E, F) \\ x &\mapsto Df(x). \end{aligned}$$

**Définition 1.3.** *Nous dirons que  $f$  est deux fois différentiable en  $a \in E$  si  $f$  est différentiable sur un voisinage  $U$  de  $a$  et si l'application  $Df$  est différentiable en  $a$ . On appellera  $D^2 f(a) = D(Df)(a)$  la différentielle seconde de  $f$  en  $a$ .*

L'application  $D^2 f(a)$  est donc un élément de  $L(E, L(E, F))$  : à tout élément  $h_1 \in E$  est associé l'application linéaire  $D^2 f(a) \cdot h_1 \in L(E, F)$ , qui à tout  $h_2 \in E$  associe  $(D^2 f(a) \cdot h_1) \cdot h_2$ . On peut donc voir  $D^2 f(a)$  comme une application bilinéaire sur  $E$ , c'est-à-dire comme un élément de  $L(E \times E, F)$ , en l'identifiant à l'application :

$$(h_1, h_2) \mapsto (D^2 f(a) \cdot h_1) \cdot h_2.$$

On a même beaucoup mieux (voir [2] pour une démonstration).

**Théorème 1.2 (de Schwarz).** *Si  $f$  est deux fois différentiable en  $a \in U$ , alors  $D^2 f(a)$  est une application bilinéaire symétrique, c'est-à-dire que, pour tout  $(h_1, h_2) \in E \times E$ ,*

$$D^2 f(a) \cdot (h_1, h_2) = D^2 f(a) \cdot (h_2, h_1).$$



De façon générale,  $f$  est dite  $k$  fois différentiable en  $a$  si elle est  $(k - 1)$  fois différentiable sur un voisinage  $U$  de  $a$  et si sa différentielle  $(k - 1)$ -ème  $D^{(k-1)}f : U \rightarrow L(E^{k-1}, F)$  est différentiable en  $a$ . Sa différentielle  $k$ -ème  $D^k f(a) = D(D^{(k-1)}f)(a)$  est donc bien pour tout  $x \in U$  une application linéaire de  $E^k$  dans  $F$ , c'est-à-dire une application  $k$ -linéaire. Nous noterons  $D^k f(a) \cdot (h_1, \dots, h_k)$  l'action de  $D^k f(a)$  sur  $(h_1, \dots, h_k) \in E^k$ .

Le théorème de Schwarz se généralise à l'ordre  $k$  : si  $f$  est  $k$  fois différentiable en  $a \in U$ , alors  $D^k f(a)$  est une application  $k$ -linéaire symétrique.

Enfin, si  $D^k f(\cdot)$  est continue, on dit que  $f$  est de classe  $C^k$ .

## Formules de Taylor

Nous donnons les trois versions classiques.

**Théorème 1.3.** *Supposons que  $f : U \subset E \rightarrow F$  soit une application  $k$  fois différentiable en  $a \in U$ . Alors*

$$f(a + h) = f(a) + Df(a) \cdot h + \dots + \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot (h)^k + o(\|h\|^k),$$

où on a noté  $D^k f(a) \cdot (h)^k = D^k f(a) \cdot (h, \dots, h)$ .

### \*Démonstration.

Elle se fait par récurrence sur  $k$ . La formule est vraie pour  $k = 1$  par définition de la différentiabilité. Supposons-la vraie pour  $k - 1$  et montrons qu'elle est vraie pour  $k$ . Pour  $t \in [0, 1]$ , posons

$$\begin{aligned} g(t) &= f(a + th) - f(a) - Df(a) \cdot (th) - \dots - \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot (th)^k \\ &= f(a + th) - f(a) - tDf(a) \cdot h - \dots - \frac{1}{k!} t^k D^k f(a) \cdot (h)^k. \end{aligned}$$

La fonction  $g$  est alors dérivable et on a

$$\begin{aligned} g'(t) &= Df(a + th) \cdot h - Df(a) \cdot h - \dots - \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} D^k f(a) \cdot (h)^k \\ &= [Df(a + th) - Df(a) - \dots - \frac{1}{(k-1)!} D^k f(a) \cdot (th)^{(k-1)}] \cdot h. \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence s'applique à  $Df(\cdot)$  qui est  $(k - 1)$  fois différentiable en  $a$  :

$$\|Df(a + th) - Df(a) - \dots - \frac{1}{(k-1)!} D^k f(a) \cdot (th)^{(k-1)}\| = o(\|th\|^{k-1}),$$

et par conséquent  $\|g'(t)\| = o(\|th\|^{k-1})\|h\| = o(t^{k-1}\|h\|^k)$ . L'inégalité des accroissements finis appliquée à  $g$  montre que

$$\|g(1) - g(0)\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|g'(t)\|,$$

ce qui est la conclusion recherchée puisque  $g(0) = 0$ . □

**Théorème 1.4.** *Supposons que  $U \subset E$  soit un ouvert connexe, que  $f : U \rightarrow F$  soit une application  $k + 1$  fois différentiable sur  $U$  et qu'il existe  $M \geq 0$  tel que*

$$\sup_{x \in U} \|Df^{k+1}(x)\| \leq M.$$

Alors pour tous  $a, b \in U$ ,

$$\|f(b) - f(a) - Df(a) \cdot (b - a) - \dots - \frac{1}{k!} Df^{(k)}(a) \cdot (b - a)^k\| \leq M \frac{\|b - a\|^{k+1}}{(k + 1)!}.$$

**\*Démonstration.** Faisons la démonstration dans le cas où  $U$  est convexe. Comme précédemment, on procède par récurrence sur  $k$  et on introduit :

$$g(t) = f(a + th) - f(a) - Df(a) \cdot (th) - \dots - \frac{1}{k!} D^k f(a) \cdot (th)^k,$$

où  $h = b - a$ . On voit en appliquant l'hypothèse de récurrence à  $Df(\cdot)$  qu'on a, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$\|g'(t)\| \leq M \|b - a\| \|b - a\|^k \frac{t^k}{k!}.$$

En intégrant cette dernière expression par rapport à  $t \in [0, 1]$  (ou en utilisant la remarque finale qui suit le théorème des accroissements finis), on obtient

$$\|g(1) - g(0)\| \leq M \|b - a\|^{k+1} \int_0^1 \frac{t^k}{k!} dt \leq M \|b - a\|^{k+1} \frac{1}{(k + 1)!},$$

c'est-à-dire le résultat recherché. □

**Théorème 1.5 (Taylor avec reste intégral).** *Supposons que  $U \subset E$  soit un ouvert convexe et que  $f : U \rightarrow F$  soit de classe  $C^{k+1}$ . Alors,*

$$f(b) - f(a) - Df(a) \cdot (b - a) - \dots - \frac{1}{k!} Df^{(k)}(a) \cdot (b - a)^k = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} Df^{(k+1)}(a + t(b-a)) \cdot (b-a)^{k+1} dt.$$

La démonstration de ce théorème s'effectue de la manière habituelle en intégrant par partie.

## 1.4 Inversion locale et fonctions implicites

### Inversion locale

Le problème de l'inversion est de résoudre en  $x$  une équation de la forme  $f(x) = y$ . Dans le cas linéaire, ce problème est bien connu : si  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  est inversible (*i.e.*  $\det A \neq 0$ ), la solution dans  $\mathbb{R}^n$  de  $Ax = y$  est donnée par  $x = A^{-1}y$ . Quand  $f$  est différentiable un résultat semblable est vrai localement, c'est le théorème d'inversion locale, dont la preuve est donnée en annexe, section A.4.

**Théorème 1.6 (d'inversion locale).** *Soit  $f : E \rightarrow F$  une application de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) sur un voisinage de  $a \in E$ . On suppose que  $Df(a) \in L(E, F)$  est inversible.*

*Alors il existe un ouvert  $V \subset E$  contenant  $a$  et un ouvert  $W \subset F$  contenant  $f(a)$ , tels que  $f$  est une bijection de  $V$  dans  $W = f(V)$  dont l'inverse  $f^{-1} : W \rightarrow V$  est de classe  $C^k$ .*

En d'autres termes, on a l'équivalence

$$(x \in V \text{ et } y = f(x)) \iff (y \in W \text{ et } x = f^{-1}(y)).$$

Le point  $y \in W$  étant donné, l'équation  $f(x) = y$  admet donc une unique solution  $x$  dans  $V$  (attention cependant qu'elle peut en avoir d'autres en dehors de  $V$ ).

Enfin, on obtient la différentielle de  $f^{-1}$  à partir de celle de  $f$  par

$$D(f^{-1})(y) = Df(x)^{-1}, \quad \text{pour } x \in V \text{ et } y = f(x).$$

*Remarque 1.4.*

1. L'application  $f^{-1} : W \rightarrow V$  n'est pas la réciproque de  $f$ , mais la réciproque de la restriction de  $f$  à  $V$ . Il aurait donc été plus rigoureux (mais plus lourd) de la noter  $(f|_V)^{-1}$ .
2. Pour que  $Df(a)$  soit inversible, il est nécessaire que les espaces vectoriels  $E$  et  $F$  soient de même dimension :  $\dim E = \dim F$  (ceci n'a bien entendu plus de sens quand les espaces vectoriels  $E$  et  $F$  ne sont plus de dimension finie, voir la section 1.5).
3. Dans l'énoncé du théorème, «  $Df(a)$  inversible » apparaît comme une condition suffisante pour qu'une fonction  $C^k$  soit localement inversible d'inverse  $C^k$ . C'est en fait aussi une condition nécessaire : si  $f$  est bijective et  $f^{-1}$  de classe  $C^1$ , on a  $f^{-1}(f(x)) = x$  et  $f(f^{-1}(y)) = y$ , d'où, par différentiation des fonctions composées,

$$D(f^{-1})(f(a)) \circ Df(a) = \text{Id} \quad \text{et} \quad Df(a) \circ D(f^{-1})(f(a)) = \text{Id},$$

ce qui entraîne que  $Df(a)$  est inversible.

4. Quand  $E = F = \mathbb{R}^n$ , l'application  $f$  s'écrit  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  et l'hypothèse à vérifier est que le déterminant de la jacobienne en  $a$  est non nul, c'est-à-dire,

$$\det Df(a) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \neq 0.$$

## \*Difféomorphismes

Le théorème d'inversion locale est lié à la notion de difféomorphisme. Rappelons d'abord qu'un *homéomorphisme*  $f : U \rightarrow V$  entre deux ouverts  $U \subset E$  et  $V \subset F$  est une application continue de  $U$  dans  $F$ , qui établit une bijection entre  $U$  et  $V$ , et telle que son inverse  $f^{-1} : V \rightarrow U$  est continue.

**Définition 1.4.** *Nous dirons qu'un homéomorphisme  $f : U \rightarrow V$  entre deux ouverts  $U \subset E$  et  $V \subset F$  est un  $C^k$ -difféomorphisme si  $f : U \rightarrow V$  et  $f^{-1} : V \rightarrow U$  sont de classe  $C^k$ .*

Le théorème d'inversion locale peut se reformuler de la façon suivante : si  $f : E \rightarrow F$  est une application  $C^k$  sur un voisinage de  $a \in E$  telle que  $Df(a)$  est inversible, alors  $f$  est un  $C^k$ -difféomorphisme d'un voisinage de  $a$  sur un voisinage de  $f(a)$ .

## Fonctions implicites

Le problème de l'inversion locale était de résoudre en  $x$  une équation  $y = f(x)$ . Nous cherchons maintenant à résoudre en  $y$  une équation de la forme  $f(x, y) = 0$ . Considérons trois espaces vectoriels  $E, F, G$  de dimension finie et une application  $f : U \subset E \times F \rightarrow G$ . Notons  $x$  la variable dans  $E$  et  $y$  la variable dans  $F$ . Pour  $(a, b) \in U$ , en généralisant la notion de dérivée partielle, nous noterons :

- $D_x f(a, b)$  la différentielle au point  $a$  de l'application partielle  $x \mapsto f(x, b)$  (c'est la *différentielle partielle* de  $f$  par rapport à  $x$ );
- $D_y f(a, b)$  la différentielle au point  $b$  de  $y \mapsto f(a, y)$  (c'est la différentielle partielle de  $f$  par rapport à  $y$ ).

**Théorème 1.7 (des fonctions implicites).** *Supposons que  $f$  soit de classe  $C^k$ , vérifie  $f(a, b) = 0$  et que  $D_y f(a, b) \in L(F, G)$  soit inversible.*

*Alors il existe  $V \subset E$  un voisinage ouvert de  $a$ ,  $W \subset F$  un voisinage ouvert de  $b$ , avec  $V \times W \subset U$ , et une unique application  $\varphi : V \rightarrow W$  de classe  $C^k$  telle que*

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \iff (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)).$$

La preuve de ce théorème est donnée en annexe, section A.4.

Quitte à réduire les voisinages  $V$  et  $W$ , on peut supposer que  $D_y f(x, y)$  est inversible pour tout  $(x, y) \in V \times W$ . Ceci permet de calculer la différentielle de  $\varphi$ . En effet, pour tout  $x \in V$ , on a  $f(x, \varphi(x)) = 0$ . En prenant la différentielle de cette identité, on obtient

$$D_x f(x, \varphi(x)) + D_y f(x, \varphi(x)) \circ D\varphi(x) = 0,$$

et donc, puisque  $D_y f(x, \varphi(x))$  est inversible,

$$D\varphi(x) = -[D_y f(x, \varphi(x))]^{-1} \circ D_x f(x, \varphi(x)). \quad (1.1)$$

*Remarque 1.5.*

1. Pour que  $D_y f(a, b)$  soit inversible, il est nécessaire que  $F$  et  $G$  soient de même dimension :  $\dim F = \dim G$ .
2. Ce théorème est souvent utilisé avec  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = G = \mathbb{R}^p$ . L'équation  $f(x, y) = 0$  est alors un système de  $p$  équations

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p) = 0, \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p) = 0, \end{cases}$$

à  $p$  inconnues, les  $x_i$  étant considérés comme des paramètres. Pour résoudre ce système sous la forme

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ y_p = \varphi_p(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

au voisinage de  $(a, b)$ , les hypothèses à vérifier sont  $f(a, b) = 0$  et

$$\det D_y f(a, b) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{pmatrix} (a, b) \neq 0.$$

3. Il est intéressant de donner la version linéaire du théorème des fonctions implicites. Considérons l'équation linéaire  $Ax + By = 0$ , où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $A \in \mathbb{M}_{pn}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathbb{M}_p(\mathbb{R})$ . Si la matrice  $B$  est inversible, alors cette équation a une unique solution, qui est  $y = -B^{-1}Ax$  (on reconnaît la formule (1.1) donnant la différentielle de la fonction implicite).
4. Quand  $E = \mathbb{R}$ , la formule (1.1) peut s'interpréter comme une équation différentielle non autonome. La fonction  $\varphi$  est alors l'unique solution du problème suivant (dit problème de Cauchy, voir section 4.1) :

$$\begin{cases} \varphi'(x) = -[D_y f(x, \varphi(x))]^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)), \\ \varphi(a) = b. \end{cases}$$

5. D'un point de vue géométrique, le théorème des fonctions implicites donne un critère pour que l'ensemble défini par l'équation  $f(x, y) = 0$  puisse, localement, être vu comme *le graphe d'une fonction*  $\varphi$ .

## 1.5 Et en dimension infinie?

Dans les sections précédentes, nous nous sommes restreint au cadre des espaces vectoriels de dimension finie afin de faciliter la compréhension. La plupart des résultats introduits restent cependant valables dans le contexte des espaces de Banach.

**Définition 1.5.** *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  qui est complet pour la distance  $d(v, w) = \|v - w\|$ , c'est-à-dire que toute suite de Cauchy  $u_n$  de  $E$  vérifiant, par définition,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, \|u_n - u_m\| < \epsilon,$$

*converge vers un  $u \in E$ .*

On se reportera à l'annexe A pour une introduction aux espaces vectoriels normés et par exemple à [2] pour une étude plus complète. Voici quelques exemples d'espaces de Banach.

1. Tout espace vectoriel de dimension finie est un espace de Banach.
2. Si  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach, l'ensemble  $L_c(E, F)$  des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$  est un espace de Banach si on le munit de la norme d'opérateurs  $\|\cdot\|_{E, F}$ .
3. Si  $(X, d)$  est un espace métrique (quelconque) et  $F$  un espace de Banach, l'ensemble  $C_b^0(X, F)$  des fonctions continues et bornées de  $X$  dans  $F$  est un espace de Banach pour la norme  $\|\cdot\|_{C^0}$ , définie par

$$\|f\|_{C^0} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_F.$$

En particulier, muni de cette norme, l'ensemble  $C^0([t_0, t_1], F)$  des fonctions continues sur un intervalle  $[t_0, t_1]$  et à valeurs dans un espace de Banach  $F$  est un espace de Banach.

4. Si  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle compact et  $F$  un espace de Banach, l'espace  $C^1(I, F)$  des applications à valeurs dans  $F$  de classe  $C^1$  sur  $I$  est un espace de Banach quand on le munit de la norme  $\|\cdot\|_{C^1}$ , définie par

$$\|f\|_{C^1} = \max \left( \sup_{t \in I} \|f(t)\|, \sup_{t \in I} \|Df(t)\| \right).$$

Le deuxième exemple fait apparaître une différence fondamentale avec les espaces de dimension finie : une application linéaire entre des espaces de Banach n'est pas forcément continue<sup>1</sup>. Pour généraliser la notion de différentiabilité aux espaces de

<sup>1</sup> Considérons par exemple l'espace vectoriel  $E$  des polynômes à coefficients réels, muni de la norme  $\|P\| = \sup_{x \in [0, 1]} |P(x)|$ , et l'application linéaire  $f \in L(E, \mathbb{R})$  définie par  $f(P) = P(3)$ . Alors  $f$  n'est pas continue : quand  $n \rightarrow \infty$ , l'image par  $f$  de la suite  $P_n = (\frac{x}{2})^n$  ne tend pas vers 0 alors que  $\|P_n\| \rightarrow 0$ .

Banach, il sera donc nécessaire de préciser dans la définition que la différentielle doit être une application linéaire *continue*.

**Définition 1.6.** Soient  $E, F$  des espaces de Banach et  $U \subset E$  un ouvert. Nous dirons que  $f : U \rightarrow F$  est différentiable en  $a \in U$  s'il existe une application linéaire continue  $L_a : E \rightarrow F$  telle que, pour tout  $v$  vérifiant  $a + v \in U$ , on ait

$$f(a + v) = f(a) + L_a(v) + o(\|v\|).$$

Avec cette définition de la différentiabilité, la plupart des énoncés des résultats des sections précédentes restent vrais dans les espaces de Banach. Ainsi, en substituant la définition 1.6 à 1.1, la proposition 1.1 (composition des différentielles), le théorème des accroissements finis (théorème 1.1) et son corollaire, la proposition 1.2, le théorème de Schwarz (théorème 1.2), et les formules de Taylor (théorèmes 1.3, 1.4 et 1.5) restent valides quand les espaces vectoriels  $E, F, G$  sont des espaces de Banach. Quant aux théorèmes d'inversion locale et des fonction implicites, ils sont énoncés et prouvés dans le contexte des espaces de Banach en annexe (section A.4).

## 1.6 Exercices corrigés

### Exercice 1.1.

1. Soit  $F : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  l'application  $A \mapsto A^2$ . Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  en tout  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  et calculer sa différentielle  $DF(A)$ .

2. Soit  $\exp$  l'application exponentielle de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  dans lui-même, définie par

$$\exp A = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

Montrer que cette application est différentiable en 0 et calculer sa différentielle en ce point.

3. Soit  $\det$  l'application déterminant de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer *a priori* que cette application est de classe  $C^1$  ( $C^\infty$  en fait). Calculer sa différentielle en l'identité, puis en une matrice inversible, et enfin en tout point.

4. Considérons des matrices  $A_1, \dots, A_n$  dans  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  et un vecteur  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . On suppose que les vecteurs  $A_1 x_0, \dots, A_n x_0$  sont linéairement indépendants. Montrer qu'il existe un voisinage  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_0$  et un voisinage  $V \subset \mathbb{R}^n$  de 0 tels que tout point  $x \in U$  peut s'écrire de façon unique

$$x = \exp(u_1 A_1 + \dots + u_n A_n) x_0,$$

avec  $u = (u_1, \dots, u_n) \in V$ . Comment varie  $u$  en fonction de  $x$ ?

**Corrigé de l'exercice 1.1.**

1. On utilise la définition. Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour tout  $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , on a

$$F(A + H) = (A + H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2.$$

Or  $A^2 = F(A)$ ,  $H \mapsto AH + HA$  est linéaire et  $H^2 = o(\|H\|)$  (en effet, en utilisant une norme matricielle – donc multiplicative – il est clair que  $H^2/\|H\|$  tend vers 0 quand  $\|H\| \rightarrow 0$ ). Ainsi  $F$  est différentiable en  $A$  et  $DF(A) \cdot H = AH + HA$ . De plus  $A \mapsto DF(A)$  est linéaire, donc continue, ce qui implique que  $F$  est de classe  $C^1$ .

2. Pour tout  $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , on a

$$\exp(0 + H) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{H^i}{i!} = I + H + \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{H^i}{i!}.$$

Or  $I = \exp 0$ ,  $H \mapsto H$  est linéaire (!) et  $\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{H^i}{i!}$  est un  $o(H)$  car

$$\left\| \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{H^i}{i!} \right\| \leq \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^i}{i!} \leq \|H\|^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\|H\|^i}{(i+2)!} \leq \|H\|^2 e^{\|H\|}.$$

Donc  $\exp$  est différentiable en 0 et  $D \exp(0) \cdot H = H$ .

3. Le déterminant  $\det A$  est un polynôme en les coefficients de la matrice  $A$ . Comme la somme, le produit et la composition d'applications de classe  $C^\infty$  sont  $C^\infty$ ,  $\det$  est une application de classe  $C^\infty$ .

En particulier,  $D \det(I)$  existe : c'est une application linéaire de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ . Calculons l'image par  $D \det(I)$  de la base  $E_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  ( $E_{ij}$  est la matrice dont la composante  $i, j$  vaut 1 et toutes les autres 0) :

$$D \det(I) \cdot E_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(I + tE_{ij}) - \det I}{t} = \delta_{ij},$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. On obtient l'image d'une matrice  $H$  quelconque par linéarité : si  $H = \sum_{i,j} h_{ij} E_{ij}$ ,

$$D \det(I) \cdot H = \sum_{i,j} h_{ij} D \det(I) \cdot E_{ij} = \sum_{i,j} \delta_{ij} h_{ij} = \text{tr } H.$$

Considérons maintenant une matrice  $A$  inversible. Pour tout  $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\det(A + H) = \det A \det(I + A^{-1}H) = \det A (1 + \text{tr}(A^{-1}H) + o(\|A^{-1}H\|)),$$



la dernière égalité venant de la différentiabilité de  $\det$  en  $I$ . Comme  $\|A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\| \|H\|$  (norme matricielle), on obtient :

$$\det(A + H) = \det A + \det A \operatorname{tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|),$$

et donc  $D \det(A) \cdot H = \det A \operatorname{tr}(A^{-1}H)$ .

Enfin, remarquons que, si  $A$  est inversible et  $B$  est sa comatrice, alors  $\det(A)A^{-1} = B^T$ , ce qui implique  $D \det(A) \cdot H = \operatorname{tr}(B^T H)$ . Étant donné que  $A \mapsto D \det(A) \cdot H$  est une application continue sur  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  (car  $\det$  est  $C^1$ ) ainsi que  $A \mapsto \operatorname{tr}(B^T H)$ , que ces 2 applications sont égales pour  $A$  inversible et que les matrices inversibles sont denses dans  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , on a, pour tout  $A$  et tout  $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$D \det(A) \cdot H = \operatorname{tr}(B^T H).$$

**4.** Nous allons montrer que le théorème d'inversion locale  $C^\infty$  s'applique en 0 à l'application  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\phi(u) = \exp(u_1 A_1 + \cdots + u_n A_n) x_0.$$

La conclusion du théorème nous donnera alors exactement le résultat désiré, avec  $u$  dépendant de façon  $C^\infty$  de  $x$ .

Remarquons d'abord que  $\phi = f \circ g$ , où  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  est définie par

$$g(u) = u_1 A_1 + \cdots + u_n A_n,$$

et  $f : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  par  $f(M) = \exp(M)x_0$ . L'application  $g$  est  $C^\infty$  car linéaire et  $f$  l'est également : pour le montrer il suffit d'itérer le théorème de dérivation sous le signe somme, les séries dérivées à tout ordre étant normalement convergentes. Ainsi  $\phi$  est  $C^\infty$ . D'autre part, on a  $g(0) = 0$  et  $Dg(0) \cdot h = h_1 A_1 + \cdots + h_n A_n$  pour tout  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ , ainsi que  $f(0) = x_0$  et  $Df(0) \cdot H = (D \exp(0) \cdot H)x_0 = Hx_0$  pour tout  $H \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . En conséquence,  $\phi(0) = x_0$  et, par la formule de composition des différentielles,

$$D\phi(0) \cdot h = Df(0) \cdot (Dg(0) \cdot h) = h_1 A_1 x_0 + \cdots + h_n A_n x_0.$$

Autrement dit,  $D\phi(0)$  est la matrice dont les colonnes sont  $A_1 x_0, \dots, A_n x_0$ . Par hypothèse, cette matrice est de rang  $n$ , ce qui montre que la version  $C^\infty$  du théorème d'inversion locale s'applique à  $\phi$  en 0.

**Exercice 1.2.** Soient  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application  $C^1$  et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application

$$g(u, v) = f(\cos u + \sin v, \sin u + \cos v, e^{u-v}).$$

**1.** Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$ .

**2.** On suppose que  $f$  est différentiable au point  $M = (1, 1, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$  et que sa différentielle en ce point est, en convenant d'identifier une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  avec sa matrice,

$$Df(M) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la différentielle de  $g$  au point  $P = (\pi/2, \pi/2)$ .

**3.** Montrer qu'il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant

$$\left| (x-8)^2 + (y-4)^2 \right|^{1/2} < \varepsilon_0,$$

on peut trouver  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\begin{cases} x = \cos u + 3 \sin u + \sin v + 3 \cos v + 4e^{u-v}, \\ y = 2(\cos u + \sin v) - (\sin u + \cos v) + 3e^{u-v}. \end{cases} \quad (1.2)$$

### Corrigé de l'exercice 1.2.

**1.** Posons  $h(u, v) = (\cos u + \sin v, \sin u + \cos v, e^{u-v})$ . C'est une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  de classe  $C^\infty$ . Comme  $f$  est de classe  $C^1$ , l'application  $g = f \circ h$  est également de classe  $C^1$ .

**2.** Par composition des différentielles  $Dg(P) = Df(h(P)) Dh(P)$  (produit de matrices). Or  $Df(h(P))$  est connu puisque  $h(P) = M$ , et  $Dh(P)$  est la matrice des dérivées partielles de  $h$  en  $P$ , c'est-à-dire,

$$Dh(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u & \cos v \\ \cos u & -\sin v \\ e^{u-v} & -e^{u-v} \end{pmatrix} \Rightarrow Dh(P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En faisant le produit avec  $Df(M)$ , on obtient finalement  $Dg(P) = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

**3.** Le système d'équation (1.2) s'écrit  $\varphi(u, v) = (x, y)$ , et la question revient à montrer que  $\varphi$  est surjective sur une boule de rayon  $\varepsilon_0$  centrée au point  $(8, 4)$ . Nous allons pour cela utiliser le théorème d'inversion locale.

Avec les notations des questions précédentes, on cherche d'abord une fonction  $f$  telle que  $\varphi = f \circ h$ ,  $f(M) = (8, 4)$  et  $Df(M)$  est la matrice donnée dans la question 2. Le plus simple est d'essayer une application linéaire, c'est-à-dire,

$$f(x, y, z) = Df(M) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que cette application  $f$  convient, et donc que  $\varphi = f \circ h = g$ . En particulier,  $\varphi(P) = (8, 4)$  et, en utilisant la question précédente, la différentielle de  $\varphi$  en  $P$ ,

$$D\varphi(P) = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

est inversible (déterminant non nul).

Le théorème d'inversion locale s'applique : il existe un voisinage  $U$  de  $P$  et un voisinage  $V$  de  $\varphi(P) = (8, 4)$  tels que  $\varphi|_U : U \rightarrow V$  est une bijection. Ceci implique en particulier que  $\varphi$  est surjective sur  $V$ . Comme  $V$  contient toute boule  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-8)^2 + (y-4)^2} < \varepsilon_0\}$  pour  $\varepsilon_0$  suffisamment petit, on a la conclusion.

**Exercice 1.3.** Soient  $A \in \mathbb{M}^n(\mathbb{R})$  telle que  $\det(A - I) \neq 0$  et  $F$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on considère l'application

$$\begin{aligned} G_\varepsilon : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X &\longmapsto AX + \varepsilon F(X). \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe des réels positifs  $\varepsilon_0$  et  $\delta$  tels que, pour  $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ , l'équation  $G_\varepsilon(X) = X$  admet une solution unique  $X_\varepsilon$  dans la boule  $B(0, \delta)$ . Comment varie  $X_\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$  ?

### Corrigé de l'exercice 1.3.

On va utiliser le théorème des fonctions implicites. Introduisons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\varepsilon, X) &\longmapsto \varphi(\varepsilon, X) = G_\varepsilon(X) - X. \end{aligned}$$

Cette application est  $C^1$  et  $\varphi(0, 0) = 0$ . D'autre part,  $D_X\varphi(\varepsilon, X) = A + \varepsilon DF(X) - I$ , donc  $D_X\varphi(0, 0) = A - I$  est inversible. Le théorème des fonctions implicites s'applique : il existe un voisinage  $U$  de 0 dans  $\mathbb{R}$ , un voisinage  $V$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  et une application  $\psi : U \rightarrow V$  de classe  $C^1$  tels que, pour tout  $(\varepsilon, X) \in U \times V$ ,

$$\varphi(\varepsilon, X) = 0 \Leftrightarrow X = \psi(\varepsilon).$$

Quitte à restreindre les voisinages, on peut toujours supposer que  $U$  est de la forme  $] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[$  et  $V$  de la forme  $B(0, \delta)$ . On obtient donc la conclusion avec  $X_\varepsilon = \psi(\varepsilon)$ , qui varie de façon  $C^1$  en fonction de  $\varepsilon$ .

**Exercice 1.4.** On considère le système d'équations

$$x = \frac{1}{2} \sin(x + y) + t - 1, \quad y = \frac{1}{2} \cos(x - y) - t + \frac{1}{2}, \quad (1.3)$$

aux inconnues  $x$  et  $y$ . On veut montrer qu'il existe une unique solution  $X(t) = (x(t), y(t))$ , de classe  $C^\infty$ , et en donner un développement limité en  $0 \in \mathbb{R}^2$ .

Notons  $X = (x, y)$  et, pour  $t \in \mathbb{R}$  fixé,

$$F_t(X) = \left(\frac{1}{2} \sin(x + y) + t - 1, \frac{1}{2} \cos(x - y) - t + \frac{1}{2}\right).$$

1. Montrer que, dans la norme d'opérateur induite par la norme euclidienne, on a  $\|DF_t(X)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .
2. En déduire que  $F_t$  est contractante et que, pour  $t$  fixé, le système d'équations (1.3) a une unique solution dans  $\mathbb{R}^2$  que l'on notera  $X^*(t) = (x^*(t), y^*(t))$ .
3. Montrer, en utilisant la question 1, que l'application  $I - DF_t(X)$  est inversible quel que soit  $X \in \mathbb{R}^2$  ( $I$  est l'identité de  $\mathbb{R}^2$ ).
4. Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites que la fonction  $t \mapsto X^*(t)$  est de classe  $C^\infty$ .
5. Donner un développement de Taylor à l'ordre 1 de  $X^*(t)$  en  $t = 1$ .

#### Corrigé de l'exercice 1.4.

1. Commençons par calculer  $DF_t(X)$  : comme  $F$  est une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C^\infty$ ,  $DF_t(X)$  est la matrice des dérivées partielles

$$DF_t(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos(x + y) & \frac{1}{2} \cos(x + y) \\ -\frac{1}{2} \sin(x - y) & \frac{1}{2} \sin(x - y) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour  $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $DF_t(X) \cdot h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (h_1 + h_2) \cos(x + y) \\ (h_2 - h_1) \sin(x - y) \end{pmatrix}$ . Prenons la norme euclidienne de ce vecteur :

$$\begin{aligned} \|DF_t(X) \cdot h\|^2 &= \frac{1}{4} \left( (h_1 + h_2)^2 \cos^2(x + y) + (h_2 - h_1)^2 \sin^2(x - y) \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left( (h_1 + h_2)^2 + (h_2 - h_1)^2 \right) = \frac{1}{2} (h_1^2 + h_2^2) = \frac{1}{2} \|h\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit la norme de  $DF_t(X)$ ,

$$\|DF_t(X)\| = \sup_{h \neq 0} \frac{\|DF_t(X) \cdot h\|}{\|h\|} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Notons qu'il est important ici d'utiliser la norme euclidienne partout, i.e. la norme euclidienne pour les vecteurs et la norme d'opérateur induite par la norme euclidienne pour les matrices. Ainsi, pour un vecteur  $X$ , la norme est  $\|X\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  et pour une matrice  $A$ ,  $\|A\| = \sup_{Y \neq 0} \frac{\|AY\|}{\|Y\|}$ . Si on avait utilisé la norme  $\ell_1$  ou  $\ell_\infty$ , le majorant de  $\|DF_t(X)\|$  serait 1 et non plus  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (vérifiez-le), et le reste du raisonnement ne pourrait pas être appliqué.

**2.** La question précédente implique, par le théorème des accroissements finis, que pour tout couple  $X, Y \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|F_t(X) - F_t(Y)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|X - Y\|$ , c'est-à-dire que  $F_t$  est  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -contractante.

Utilisons alors le théorème du point fixe de Picard : puisque  $F_t$  est contractante, elle admet un unique point fixe  $X^*(t) \in \mathbb{R}^2$ . Autrement dit,  $X^*(t) = (x^*(t), y^*(t))$  est l'unique solution de l'équation (1.3) dans  $\mathbb{R}^2$ .

**3.** C'est la conséquence d'un résultat général : *si une matrice  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  vérifie  $\|A\| < 1$ , alors  $I - A$  est inversible.*

En effet, pour une telle matrice  $A$ , la série  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$  est convergente (car normalement convergente). En faisant alors tendre  $p$  vers l'infini dans l'identité

$$\left( \sum_{k=0}^p A^k \right) (I - A) = (I - A) \left( \sum_{k=0}^p A^k \right) = I - A^{p+1},$$

on obtient que  $I - A$  est inversible, d'inverse  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ , puisque  $A^p \rightarrow 0$  quand  $p \rightarrow \infty$ .

**4.** Introduisons l'application  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $G(t, X) = X - F_t(X)$ , à laquelle nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites (les zéros de  $G$  étant les solutions de l'équation (1.3)). Remarquons dès maintenant que  $G$  est de classe  $C^\infty$ .

Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ . On pose  $X_0 = X^*(t_0)$ , où  $X^*(\cdot)$  est la fonction obtenue à la question **2.**. On a donc  $G(t_0, X_0) = 0$ .

D'autre part, la différentielle partielle de  $G$  par rapport à  $X$  est

$$D_X G(t, X) = I - DF_t(X),$$

qui est inversible d'après la question précédente.

Toutes les hypothèses du théorème des fonctions implicites étant satisfaites, il existe un voisinage  $V$  de  $t_0$ , un voisinage  $W$  de  $X_0$  et une application  $\varphi : V \rightarrow W$  de classe  $C^\infty$  tels que, pour  $(t, X) \in V \times W$ ,

$$G(t, X) = 0 \Leftrightarrow X = \varphi(t).$$

Or, d'après la question **2.**,  $G(t, X) = 0 \Leftrightarrow X = X^*(t)$ . Par conséquent  $X^*(\cdot)|_V = \varphi(\cdot)$ , et donc  $X^*(\cdot)$  est  $C^\infty$  en  $t_0$ .

**5.** Remarquons d'abord que  $X^*(1) = 0$ . Il suffit ensuite de dériver  $G(t, X^*(t)) = 0$  par rapport à  $t$

$$D_t G(t, X^*(t)) + D_X G(t, X^*(t)) \cdot \frac{dX^*}{dt}(t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -1 + x'(t)\left(1 - \frac{1}{2}\cos(x(t) + y(t))\right) - \frac{1}{2}y'(t)\cos(x(t) + y(t)) = 0, \\ 1 + \frac{1}{2}x'(t)\sin(x(t) - y(t)) + y'(t)\left(1 - \frac{1}{2}\sin(x(t) - y(t))\right) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

En prenant  $t = 1$  et en résolvant, on obtient  $x'(1) = 1$  et  $y'(1) = -1$ .

Remarquons d'ailleurs (même si ce n'est pas demandé dans l'énoncé) qu'en dérivant (1.4) on obtient également les dérivées secondes  $x''(1) = y''(1) = -2$ .

Finalement, en posant  $s = t - 1$ ,

$$X^*(1 + s) = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - s^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(s^3).$$

### Exercice 1.5 (Cauchy-Lipschitz).

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$ . On suppose qu'il existe une constante réelle  $L$  telle que

$$\|Df(x)\| \leq L, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On s'intéresse au problème ( $\mathcal{P}$ ) suivant :

trouver une application  $t \mapsto y(t)$  de  $[t_0, t_1]$  dans  $\mathbb{R}^n$ , continûment dérivable sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$ , et telle que

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(y(t)), & \forall t \in [t_0, t_1], \\ y(t_0) = a, \end{cases}$$

où  $a$  est un point de  $\mathbb{R}^n$  donné.

1. Soit  $E$  l'espace des fonctions continues de  $[t_0, t_1]$  dans  $\mathbb{R}^n$  muni de la norme  $C^0$ ,

$$\|y\|_{C^0} = \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|y(t)\|.$$

Montrer que le problème ( $\mathcal{P}$ ) est équivalent à trouver un point fixe de l'application  $\Phi$  de  $E$  dans  $E$  définie par

$$\Phi(y)(t) = a + \int_{t_0}^t f(y(s)) ds.$$

2. Montrer que  $\Phi$  est lipschitzienne.

3. Soient  $x$  et  $y$  deux éléments quelconques de  $E$ . Démontrer par récurrence sur  $p$  l'inégalité suivante :

$$\|\Phi^p(x)(t) - \Phi^p(y)(t)\| \leq L^p \frac{(t - t_0)^p}{p!} \|x - y\|_{C^0} \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

4. En déduire que le problème  $(\mathcal{P})$  admet une solution et une seule (ce résultat est une variante du théorème de Cauchy-Lipschitz que nous verrons au chapitre 4).

### Corrigé de l'exercice 1.5.

1. Il est clair qu'une solution de  $(\mathcal{P})$  est un point fixe de  $\Phi$ . Il suffit pour le voir d'intégrer l'équation différentielle. Réciproquement, si  $y$  est point fixe de  $\Phi$ , alors  $y$  est  $C^1$  puisque  $y(t) = \Phi(y)(t)$  et  $f$  est continue; on peut donc dériver  $y(t) = \Phi(y)(t)$  et on retrouve l'équation différentielle.

2. Si  $x$  et  $y$  sont deux éléments quelconques de  $E$ , on a

$$\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(x(s)) - f(y(s))\| ds \leq L \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\| ds,$$

la dernière inégalité résultant du théorème des accroissements finis, d'où

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{C^0} \leq L(t_1 - t_0)\|x - y\|_{C^0}.$$

Ceci prouve que  $\Phi$  est lipschitzienne (et donc continue).

3. L'inégalité est vraie pour  $p = 1$  d'après ce qui précède. Supposons-la vérifiée pour  $p$  quelconque supérieur ou égal à 1. On a alors

$$\begin{aligned} \|\Phi^{p+1}(x)(t) - \Phi^{p+1}(y)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|f(\Phi^p(x)(s)) - f(\Phi^p(y)(s))\| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|\Phi^p(x)(s) - \Phi^p(y)(s)\| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t L^p \frac{(t - t_0)^p}{p!} \|x - y\|_{C^0} ds. \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit en calculant l'intégrale.

4. On en déduit que pour  $p$  assez grand  $\Phi^p$  est contractante. Or  $E$  est un espace de Banach (voir section 1.5), donc complet. D'après le théorème A.1 du point fixe, la fonction  $\Phi^p$  admet alors un unique point fixe dans  $E$ . Mais il n'est pas difficile de voir que les points fixes de  $\Phi$  sont les points fixes de  $\Phi^p$  : en effet si  $y$  est point fixe de  $\Phi$  on a évidemment  $\Phi^p(y) = y$ ; réciproquement, si  $\Phi^p(y) = y$ , alors

$$\Phi^p(\Phi(y)) = \Phi^{p+1}(y) = \Phi(\Phi^p(y)) = \Phi(y),$$

et donc  $\Phi(y)$  et  $y$  sont points fixes de  $\Phi^p$ , qui n'en admet qu'un seul : ils sont donc égaux. Ainsi  $\Phi$  admet un unique point fixe  $y$  dans  $E$ , c'est-à-dire que  $(\mathcal{P})$  a une et une seule solution.





---

## Équations différentielles linéaires autonomes

Nous abordons dans ce chapitre l'étude des équations différentielles les plus simples, les équations linéaires *autonomes* – aussi appelées équations linéaires à *coefficients constants* – c'est-à-dire les équations de la forme

$$x'(t) = Ax(t). \quad (2.1)$$

Précisons les notations. La *donnée*  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  est une matrice carrée ( $n \times n$ ) à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . L'*inconnue* est une application dérivable  $x(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Résoudre l'équation (2.1) signifie trouver une application  $x(\cdot)$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la dérivée  $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  vérifie  $x'(t) = Ax(t)$ . Cette équation est dite autonome parce que la donnée  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  ne dépend pas du temps. Le cas plus général où la donnée est une fonction  $A(t)$  du temps sera traité dans le chapitre 3.

### 2.1 Approche élémentaire

Commençons par un cas connu, celui d'une équation scalaire

$$x'(t) = \alpha x(t),$$

où  $\alpha$  est un réel et  $x$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Une solution  $x(\cdot)$  de cette équation décrit l'évolution en fonction du temps d'une quantité dont le taux de variation  $\alpha$  est constant.

Rappelons (cela résulte également du théorème 2.1) que la seule solution de cette équation valant  $x_0$  à l'instant  $t_0$  est

$$x(t) = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}.$$

Cette expression nous fournit toutes les informations que l'on peut souhaiter sur l'équation différentielle. Par exemple le comportement asymptotique de  $x(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  est caractérisé par le signe de  $\alpha$  :

- si  $\alpha < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ ,
- si  $\alpha = 0$ ,  $x(t)$  est constant,
- si  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = \begin{cases} +\infty & \text{si } x(t_0) \neq 0, \\ 0 & \text{si } x(t_0) = 0. \end{cases}$

Considérons maintenant un système de deux équations différentielles,

$$\begin{cases} x_1' = \alpha_1 x_1, \\ x_2' = \alpha_2 x_2. \end{cases}$$

C'est un système très simple puisque les fonctions  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont découplées. La solution de ce système est bien évidemment

$$x_1(t) = x_1(t_0)e^{\alpha_1(t-t_0)}, \quad x_2(t) = x_2(t_0)e^{\alpha_2(t-t_0)}.$$

Comme dans le cas scalaire, on a une connaissance complète du comportement des solutions. Par exemple, si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont strictement négatifs, toute solution  $(x_1(t), x_2(t))$  du système d'équations tend vers l'origine quand  $t \rightarrow +\infty$ ; si  $\alpha_1 > 0$  et  $x_1(t_0) \neq 0$ , la norme de  $(x_1(t), x_2(t))$  tend vers l'infini quand  $t \rightarrow +\infty$ , etc.

Adoptons maintenant une écriture matricielle. En posant  $x = (x_1, x_2)$ , le système de deux équations ci-dessus apparaît comme le cas particulier  $n = 2$  de l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^n$  suivante :

$$x'(t) = \Delta x(t), \quad \text{où } \Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ est diagonale.} \quad (2.2)$$

Cette équation étant en fait un système de  $n$  équations scalaires découplées, la solution est donnée par

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t_0)e^{\alpha_1(t-t_0)} \\ \vdots \\ x_n(t_0)e^{\alpha_n(t-t_0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1(t-t_0)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\alpha_n(t-t_0)} \end{pmatrix} x(t_0),$$

avec  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Nous verrons dans la section suivante que la matrice diagonale ci-dessus est l'exponentielle de la matrice  $\Delta$  et nous la noterons donc  $e^{(t-t_0)\Delta}$ . Ainsi, pour les équations différentielles de la forme (2.2), nous avons une connaissance parfaite des solutions. Nous sommes par exemple en mesure d'analyser le comportement asymptotique des solutions en fonction de  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  et de la condition initiale  $x(t_0)$  :

- si tous les  $\alpha_i$  sont strictement négatifs, toute solution  $x(t)$  converge vers l'origine quand  $t \rightarrow +\infty$ ;

- si tous les  $\alpha_i$  sont négatifs ou nuls, toute solution  $x(t)$  est bornée quand  $t \rightarrow +\infty$ ;
- si au moins un des  $\alpha_i$  est strictement positif, alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = +\infty$  pour toute solution vérifiant  $x_i(t_0) \neq 0$ ;
- etc.

L'équation différentielle  $x'(t) = \Delta x(t)$  que nous venons de traiter est un cas très particulier puisqu'il correspond à un système de  $n$  équations scalaires découplées. Beaucoup d'équations différentielles linéaires peuvent cependant s'y ramener. Considérons en effet le système  $x'(t) = Ax(t)$  avec  $A$  diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  : il existe alors une matrice inversible  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $\Delta \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $A = P\Delta P^{-1}$ .

Remarquons maintenant que, si  $x(t)$  vérifie  $x'(t) = Ax(t)$ , alors  $y(t) = P^{-1}x(t)$  vérifie  $y'(t) = \Delta y(t)$ . Autrement dit, à un changement de coordonnées près, l'équation différentielle est un système de  $n$  équations scalaires découplées. Connaissant  $y(t_0) = P^{-1}x(t_0)$ , on obtient alors  $y(t) = e^{(t-t_0)\Delta}y(t_0)$ , et

$$x(t) = Py(t) = Pe^{(t-t_0)\Delta}y(t_0) = Pe^{(t-t_0)\Delta}P^{-1}x(t_0).$$

On est donc encore capable de calculer les solutions de l'équation différentielle dans ce cas. Plus important, on voit que le comportement asymptotique des solutions est caractérisé par les éléments diagonaux de  $\Delta$ , c'est-à-dire par les *valeurs propres* de  $A$ .

En résumé, cette première approche élémentaire fait apparaître les points clés que nous allons développer maintenant :

- les solutions se calculent à l'aide de l'exponentielle de matrice;
- le comportement asymptotique des solutions est caractérisé par les valeurs propres de  $A$ .

## 2.2 Exponentielle de matrices

**Définition 2.1.** On appelle exponentielle de matrice l'application

$$\begin{aligned} \exp : M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto \exp A = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}. \end{aligned}$$

Notons que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  converge normalement. En effet,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty,$$

où on a choisi pour  $\|\cdot\|$  une norme multiplicative sur  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  (par exemple une norme matricielle). L'application exponentielle est donc continue (elle est en fait  $C^\infty$ , voir le corrigé de l'exercice 1.1, question 4.). Rappelons sans démonstration ses propriétés principales.

**Proposition 2.1.**

1. Pour  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ , l'application  $t \mapsto e^{tA}$  est dérivable et

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

2. Si  $A$  et  $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  commutent, i.e.  $AB = BA$ , on a

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

3. Pour tout  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\exp(A)$  est inversible et  $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ .

4. Si  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ , alors  $P e^A P^{-1} = e^{P A P^{-1}}$ .

5. Si  $\Delta$  est une matrice diagonale d'éléments diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors  $e^\Delta$  est diagonale d'éléments diagonaux  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ .

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation (2.1).

**Théorème 2.1.** Soient  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{K}^n$ . L'unique solution de l'équation  $x'(t) = Ax(t)$  valant  $x_0$  en  $t_0$  est l'application  $x(\cdot)$  définie par

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Démonstration.** La première propriété de la proposition précédente implique

$$\frac{d}{dt} \left( e^{(t-t_0)A} x_0 \right) = \left( \frac{d}{dt} e^{(t-t_0)A} \right) x_0 = A e^{(t-t_0)A} x_0.$$

La fonction  $x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$  est donc solution de  $x'(t) = Ax(t)$ , et  $x(t_0) = x_0$  puisque  $e^{0A} = I$ . Pour montrer l'unicité de la solution, considérons une autre solution  $y(t)$  valant  $x_0$  en  $t_0$  et formons le produit  $z(t) = e^{-(t-t_0)A} y(t)$ . En utilisant encore la proposition 2.1, on obtient

$$z'(t) = -A e^{-(t-t_0)A} y(t) + e^{-(t-t_0)A} y'(t) = -A e^{-(t-t_0)A} y(t) + e^{-(t-t_0)A} A y(t) = 0,$$

car  $A$  et  $e^{tA}$  commutent. Donc  $z(t)$  est une constante, et puisque  $z(t_0) = x_0$ , on obtient  $y(t) = e^{(t-t_0)A} z(t_0) = e^{(t-t_0)A} x_0$ . □

Ainsi, la résolution d'une équation linéaire autonome se ramène au calcul d'une exponentielle de matrices. Remarquons en particulier que les deux derniers points de la proposition 2.1 permettent de retrouver le résultat de la section 2.1 : si  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{K}$ , c'est-à-dire

$$A = P\Delta P^{-1}, \quad P \in GL_n(\mathbb{K}), \quad \Delta \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale,}$$

alors on a  $e^{tA} = Pe^{t\Delta}P^{-1}$  et la solution de l'équation (2.1) est

$$x(t) = Pe^{(t-t_0)\Delta}P^{-1}x(t_0).$$

Malheureusement toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. La théorie de la réduction des endomorphismes permet cependant de mener à bien le calcul.

## 2.3 Calcul de l'exponentielle de matrices

Le but de cette section est de calculer l'exponentielle d'une matrice  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  à un changement de base près, c'est-à-dire de calculer  $P^{-1}e^{tA}P$  pour un  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  bien choisi. Nous mènerons d'abord ce calcul dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , pour les matrices à coefficients complexes. Nous montrerons ensuite comment en déduire le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Cette section repose sur des résultats standards d'algèbre linéaire que nous rappellerons sans en donner la démonstration (on les trouvera dans les cours de classes préparatoires ou de licence 2ème année).

### a. Matrices à coefficients complexes

*Polynôme caractéristique.*

Considérons une matrice  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  et notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ses *valeurs propres*. Rappelons que ce sont les seuls nombres complexes pour lesquels l'équation

$$Av = \lambda_i v$$

admet une solution  $v \in \mathbb{C}^n$  *non nulle* (les  $v_i$  correspondants s'appellent des *vecteurs propres*). Les valeurs propres s'obtiennent également comme les racines du *polynôme caractéristique* de  $A$  :  $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ . Ce polynôme est donc de la forme

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{p_r},$$

où chaque entier  $p_i$  est strictement positif et  $p_1 + \dots + p_r = n$  (le polynôme caractéristique étant de degré  $n$ ). On appelle  $p_i$  la *multiplicité algébrique* de la valeur propre  $\lambda_i$ .

Une propriété importante du polynôme caractéristique est la suivante.

**Théorème 2.2 (Cayley-Hamilton).** *Toute matrice annule son polynôme caractéristique :*

$$P_A(A) = (A - \lambda_1 I)^{p_1} \cdots (A - \lambda_r I)^{p_r} = 0.$$

Une des conséquences de ce résultat est que, le polynôme caractéristique étant un polynôme unitaire de degré  $n$ ,  $A^n$  s'écrit comme une combinaison linéaire de  $I, A, \dots, A^{n-1}$ .

*Sous-espaces propres, sous-espaces caractéristiques.*

À chaque valeur propre de  $A$  sont associés deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}^n$ . Le premier est le *sous-espace propre* :

$$\Pi_i \text{ ou } \Pi_{\lambda_i} = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_i I).$$

C'est l'ensemble des vecteurs propres associés à  $\lambda_i$ . L'entier  $e_i = \dim \Pi_i$  est appelé la *multiplicité géométrique* de la valeur propre  $\lambda_i$ .

Le deuxième est le *sous-espace caractéristique* :

$$\Gamma_i \text{ ou } \Gamma_{\lambda_i} = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_i I)^{p_i}.$$

Il est clair que  $\Pi_i \subset \Gamma_i$ , mais ces deux espaces peuvent être différents. Le rôle des espaces caractéristiques est précisé dans le résultat suivant.

**Théorème 2.3 (de décomposition des noyaux).** *L'espace  $\mathbb{C}^n$  se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques,*

$$\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_r.$$

*On a de plus les propriétés suivantes :*

1.  $\dim \Gamma_i = p_i$ ;
2. *chacun des espaces  $\Gamma_i$  est invariant par  $A$  :  $x \in \Gamma_i \Rightarrow Ax \in \Gamma_i$ ;*
3. *la restriction  $A|_{\Gamma_i}$  de  $A$  à  $\Gamma_i$  s'écrit :*

$$A|_{\Gamma_i} = \lambda_i I_{\Gamma_i} + N_i,$$

*où  $I_{\Gamma_i}$  désigne l'identité de  $\Gamma_i$  et  $N_i \in \text{End}(\Gamma_i)$  est nilpotent d'ordre  $\leq p_i$ , i.e.  $N_i^{p_i} = 0$ .*

Ce résultat appelle un certain nombre de commentaires.

- Rappelons que  $\text{End}(\Gamma_i)$  désigne l'ensemble des *endomorphismes* de  $\Gamma_i$ , c'est-à-dire des applications linéaires de  $\Gamma_i$  dans lui-même. Dire que  $\Gamma_i$  est invariant par  $A$  est équivalent à dire que  $A|_{\Gamma_i}$  appartient à  $\text{End}(\Gamma_i)$ .

- L'opérateur  $N_i$  est défini comme  $N_i = (A - \lambda_i I)|_{\Gamma_i}$ . Le fait que  $N_i$  soit nilpotent d'ordre  $\leq p_i$  n'est donc rien d'autre que la définition de  $\Gamma_i$ . Il est en revanche possible que l'ordre exact de nilpotence de  $N_i$ , c'est-à-dire le plus petit entier  $m_i \leq p_i$  tel que  $N_i^{m_i} = 0$ , soit plus petit que  $p_i$ . Dans ce cas, on a

$$\ker(A - \lambda_i I)^{p_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{m_i} \subsetneq \ker(A - \lambda_i I)^{m_i - 1}.$$

- Une matrice est *diagonalisable* si il existe une base de  $\mathbb{C}^n$  formée de vecteurs propres, ce qui équivaut à

$$\mathbb{C}^n = \Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_r.$$

D'après le théorème de décomposition des noyaux, ceci n'est possible que si  $\Pi_i = \Gamma_i$  pour tout  $i$ . Autrement dit,

*A est diagonalisable si et seulement si pour toute valeur propre les multiplicités algébrique et géométrique coïncident, i.e.  $\dim \Pi_i = p_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ .*

*Réduction de Jordan dans  $\mathbb{C}^n$ .*

Choisissons une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{C}^n$  formée de la réunion d'une base de  $\Gamma_1$ , d'une base de  $\Gamma_2, \dots$ , d'une base de  $\Gamma_r$ , et notons  $P$  la matrice de passage de cette base à la base canonique. D'après le théorème de décomposition des noyaux, l'application linéaire associée à  $A$  a pour matrice dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$P^{-1}AP = \Delta + N, \tag{2.3}$$

où  $\Delta$  est la matrice diagonale ayant pour éléments diagonaux  $\lambda_1$  ( $p_1$  fois),  $\dots$ ,  $\lambda_r$  ( $p_r$  fois), et  $N$  est une matrice nilpotente qui s'écrit par blocs comme

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_r \end{pmatrix},$$

chaque bloc  $N_i$  étant nilpotent d'ordre  $\leq p_i$ . Il est en fait possible de choisir la base  $\mathcal{B}$  de façon à mettre la matrice nilpotente  $N$  sous une forme relativement simple (voir par exemple [5]). On aboutit ainsi à la réduction de Jordan.

**Théorème 2.4 (de Jordan).** *Pour toute matrice  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}AP$  s'écrit sous forme de matrice diagonale par bloc*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

où chaque  $J_i$  est une matrice  $(p_i \times p_i)$  de la forme

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{i,e_i} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

et  $e_i = \dim \ker(A - \lambda_i I)$  est la multiplicité géométrique de  $\lambda_i$ .

On appelle la matrice  $J = P^{-1}AP$  la *forme réduite de Jordan* de  $A$  et les matrices  $J_i$  des *blocs de Jordan*.

*Remarque 2.1.*

- Pour chaque  $i$ , la matrice  $J_i$  représente l'application linéaire  $A|_{\Gamma_i} \in \text{End}(\Gamma_i)$ .
- La matrice nilpotente  $N$  de la décomposition (2.3) de la matrice  $P^{-1}AP$  associée la réduction de Jordan est de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

où les termes  $*$  sont égaux à 0 ou 1, le nombre de 1 étant égal à  $\sum_i (p_i - e_i)$ .

- Les matrices  $J_{i,k}$  sont des matrices carrées dont la dimension  $d_{i,k} := \dim(J_{i,k}) \leq p_i$  dépend de  $i$  et  $k$ . De plus,  $J_{i,k} - \lambda_i I_{d_{i,k}}$  est une matrice nilpotente d'ordre  $d_{i,k}$ . Par conséquent l'ordre de nilpotence de l'application linéaire  $N_i = (A - \lambda_i I)|_{\Gamma_i}$  est  $m_i = \max_{1 \leq k \leq e_i} \dim(J_{i,k})$
- Dans le cas particulier où les multiplicités algébrique et géométrique de  $\lambda_i$  coïncident (*i.e.*  $e_i = p_i$ ), la dimension  $\dim(J_{i,k})$  est égale à 1 pour tout  $k$ . Chaque bloc  $J_{i,k}$  est alors réduit au scalaire  $\lambda_i$  et  $J_i = \lambda_i I_{p_i}$ .
- D'après la remarque précédente, si pour chaque valeur propre les multiplicités algébrique et géométrique coïncident, la forme réduite de Jordan est diagonale. Ainsi la réduction de Jordan généralise la diagonalisation. Insistons cependant sur le fait que toute matrice de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  admet une réduction de Jordan, mais n'est pas forcément diagonalisable.

*Calcul de l'exponentielle.*

La réduction de Jordan permet de calculer  $e^{tA}$  à conjugaison près. En effet, commençons par le calcul de l'exponentielle d'un bloc  $J_{i,k}$ . Notons  $n_{i,k} = \dim(J_{i,k})$  la dimension de ce bloc et écrivons-le  $J_{i,k} = \lambda_i I + N_{i,k}$ , où  $N_{i,k}$  est la matrice ayant



des 0 sur la diagonale et des 1 juste au-dessus. Comme  $\lambda_i I$  et  $N_{i,k}$  commutent, on obtient, d'après la proposition 2.1,

$$e^{tJ_{i,k}} = e^{t\lambda_i I} e^{tN_{i,k}} = e^{t\lambda_i} e^{tN_{i,k}}.$$

De plus,  $N_{i,k}$  étant nilpotente d'ordre  $n_{i,k}$ , on a

$$e^{tN_{i,k}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(tN_{i,k})^l}{l!} = \sum_{l=0}^{n_{i,k}-1} \frac{(tN_{i,k})^l}{l!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_{i,k}-1}}{(n_{i,k}-1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ & & \cdot & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, d'après les propriétés de l'exponentielle de matrice (proposition 2.1), on a  $e^{tA} = e^{tPJP^{-1}} = Pe^{tJ}P^{-1}$ , ce qui donne finalement pour l'exponentielle de  $tA$  :

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tJ_{1,e_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_{r,e_r}} \end{pmatrix} P^{-1}, \quad (2.5)$$

$$\text{avec } e^{tJ_{i,k}} = e^{t\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_{i,k}-1}}{(n_{i,k}-1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ & & \cdot & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

## b. Matrices à coefficients réels

Considérons maintenant une matrice  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , à coefficients *réels*. On peut bien entendu considérer  $A$  comme une matrice de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ . Tout ce que nous venons de voir pour les matrices à coefficients complexes s'applique donc.

Désignons les valeurs propres réelles de  $A$  par  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , et ses valeurs propres non réelles par  $\lambda_{s+1}, \bar{\lambda}_{s+1}, \dots, \lambda_q, \bar{\lambda}_q$  (avec  $2q - s = r$ ). Le polynôme caractéristique de  $A$  est donc le polynôme à coefficients réels,

$$P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^s (\lambda - \lambda_i)^{p_i} \prod_{i=s+1}^q [(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \bar{\lambda}_i)]^{p_i}.$$

Les sous-espaces vectoriels  $\Gamma_{\lambda_i} = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_i I)^{p_i}$  de  $\mathbb{C}^n$  sont maintenant appelés les sous-espaces caractéristiques *complexes*.

*Remarque 2.2.* Rappelons les liens qui existent entre les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}^n$ , qui sont des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels, et ceux de  $\mathbb{R}^n$ , qui sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. On considère  $\mathbb{R}^n$  comme un sous-ensemble de  $\mathbb{C}^n$  et, pour un sous-espace vectoriel  $\Gamma$  de  $\mathbb{C}^n$ , on note  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$  l'ensemble des vecteurs  $v \in \Gamma$  qui sont réels. Il est facile de vérifier qu'un tel ensemble  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . De plus, si  $\Gamma$  est stable par conjugaison (*i.e.*  $v \in \Gamma \Rightarrow \bar{v} \in \Gamma$ ), alors  $\Gamma$  et  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$  ont même dimension en tant que sous-espaces respectivement de  $\mathbb{C}^n$  et de  $\mathbb{R}^n$ . En fait, dans ce cas,  $\Gamma$  est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients complexes des éléments de  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$ ; en conséquence, toute base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\Gamma \cap \mathbb{R}^n$  est également une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\Gamma$ .

Définissons maintenant les *sous-espaces caractéristiques réels* de  $A$  comme les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} E_i &= \Gamma_{\lambda_i} \cap \mathbb{R}^n, & 1 \leq i \leq s \\ E_i &= (\Gamma_{\lambda_i} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_i}) \cap \mathbb{R}^n, & s+1 \leq i \leq q. \end{aligned}$$

Remarquons alors que  $(A - \lambda_i I)^{p_i} v = 0$  implique  $(A - \bar{\lambda}_i I)^{p_i} \bar{v} = 0$ , ce qui signifie que les sous-espaces  $\Gamma_{\lambda_i}$  pour  $\lambda_i$  réel et  $\Gamma_{\lambda_i} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_i}$  pour  $\lambda_i$  non réel sont stables par conjugaison. D'après la remarque précédente et le théorème de décomposition des noyaux dans  $\mathbb{C}^n$ , on a la décomposition

$$\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_q,$$

chaque sous-espace  $E_i$  étant invariant par  $A$ . À partir de cette décomposition, nous allons donner ci-dessous une forme réduite de Jordan réelle de  $A$ . Cette forme réduite n'est cependant pas indispensable à l'étude des équations différentielles : nous verrons dans la section suivante que les solutions de l'équation (2.1) dans  $\mathbb{R}^n$  peuvent se déduire directement des solutions dans  $\mathbb{C}^n$ .

*\*Réduction de Jordan dans  $\mathbb{R}^n$ .*

Donner une forme réduite de Jordan de  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  consiste à trouver pour chaque sous-espace caractéristique une base dans laquelle l'application linéaire associée à  $A$  a une expression simple (c'est ce que nous avons fait pour les matrices à coefficients complexes). Considérons donc un des sous-espaces caractéristiques réels  $E_k$  de  $A$ .

- Si  $\lambda_k$  est réelle, *i.e.*  $1 \leq k \leq s$  : dans ce cas on a  $E_k = \ker_{\mathbb{R}}(A - \lambda_k I)^{p_k}$  et la restriction de  $A$  à  $E_k$  s'écrit simplement

$$A|_{E_k} = \lambda_k I|_{E_k} + N_k, \quad \text{où } N_k \text{ nilpotente.}$$

On peut alors montrer comme dans le cas complexe que  $A|_{E_k}$  est conjuguée au bloc de Jordan  $J_k$ .

- Si  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  n'est pas réelle, *i.e.*  $s + 1 \leq k \leq q$  : choisissons une base  $v_1, \dots, v_{p_k}$  de  $\Gamma_k$  dans laquelle  $A|_{\Gamma_k}$  se met sous forme d'un bloc de Jordan  $J_k$ , c'est-à-dire, pour  $j = 1, \dots, p_k$ ,

$$Av_j = \lambda_k v_j + \eta_j v_{j-1}, \quad \text{où } \eta_j = (J_k)_{j-1,j} = 0 \text{ ou } 1,$$

en posant  $v_0 = 0$ . Par conjugaison, il est clair que  $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{p_k}$  est une base de  $\Gamma_{\bar{\lambda}_k}$ . Pour  $j = 1, \dots, p_k$ , posons  $v_j = a_j + ib_j$ , avec  $a_j, b_j \in \mathbb{R}^n$ . Les vecteurs  $(a_1, b_1, \dots, a_{p_k}, b_{p_k})$  forment alors une base de  $E_k$ . En effet, les  $a_j = \frac{1}{2}(v_j + \bar{v}_j)$  et  $b_j = \frac{i}{2}(\bar{v}_j - v_j)$  appartiennent à  $\Gamma_{\lambda_k} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_k}$  et l'engendrent en tant que  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel puisqu'ils engendrent la base des  $v_j, \bar{v}_j$  : ils forment donc une famille génératrice à  $2p_k$  éléments du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E_k$  de dimension  $2p_k$  éléments, c'est-à-dire une base.

De plus, en identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres de l'expression

$$A(a_j + ib_j) = (\alpha_k + i\beta_k)(a_j + ib_j) + \eta_j(a_{j-1} + ib_{j-1}),$$

on obtient, en écriture matricielle,

$$A \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = C_k \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} + \eta_j \begin{pmatrix} a_{j-1} \\ b_{j-1} \end{pmatrix} \quad \text{où } C_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

La restriction de  $A$  à  $E_k$  est donc conjuguée dans la base  $(a_1, b_1, \dots, a_{p_k}, b_{p_k})$  à la matrice suivante :

$$J'_k = \begin{pmatrix} C_k & \eta_2 I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \eta_{p_k} I_2 \\ & & & C_k \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi la réduction de Jordan dans  $\mathbb{R}^n$  de  $A$ .

**Théorème 2.5.** *Pour toute matrice  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe  $Q \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $Q^{-1}AQ$  s'écrit sous forme d'une matrice diagonale par bloc  $J'$ , d'éléments diagonaux  $J_1, \dots, J_s, J'_{s+1}, \dots, J'_q$ , où, pour  $i = s + 1, \dots, q$ , chaque  $J'_i$  est une matrice  $(2p_i \times 2p_i)$  de la forme*

$$J'_i = \begin{pmatrix} J'_{i,1} & & \\ & \ddots & \\ & & J'_{i,2e_i} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } J'_{i,k} = \begin{pmatrix} C_i & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & C_i \end{pmatrix}$$

et, pour  $i = 1, \dots, s$ , les matrices  $J_i$  sont celles données dans le théorème 2.4.

Le calcul de l'exponentielle ne pose alors aucun problème, il suffit de savoir calculer  $e^{tC_i}$ . Écrivons  $C_i$  comme la somme de deux matrices qui commutent

$$C_i = \alpha_i I_2 + \beta_i B, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc son exponentielle comme un produit

$$e^{tC_i} = e^{\alpha_i t} e^{\beta_i t B}.$$

Remarquons que la matrice  $B$  est de carré égal à  $-I_2$ , ce qui implique  $B^{2p} = (-1)^p I_2$  et  $B^{2p+1} = (-1)^p B$ , soit

$$\begin{aligned} e^{sB} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} B^k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} (-1)^p s^{2p} I_2 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!} (-1)^p s^{2p+1} B \\ &= \cos(s) I_2 + \sin(s) B. \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'exponentielle de  $C_i$  :

$$e^{tC_i} = e^{\alpha_i t} \begin{pmatrix} \cos(\beta_i t) & -\sin(\beta_i t) \\ \sin(\beta_i t) & \cos(\beta_i t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $e^{tC_i}$  est la composition de la rotation d'angle  $-\beta_i t$  avec l'homothétie de facteur  $e^{\alpha_i t}$ .

## 2.4 Forme des solutions

Grâce au calcul de l'exponentielle que nous venons d'effectuer, nous sommes maintenant en mesure de préciser le théorème 2.1. Donnons d'abord la forme de la solution générale dans  $\mathbb{C}^n$ .

**Théorème 2.6.** *Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ . Toute solution de  $x'(t) = Ax(t)$  dans  $\mathbb{C}^n$  s'écrit sous la forme*

$$x(t) = \sum_{1 \leq i \leq r} e^{t\lambda_i} \left( \sum_{0 \leq k \leq m_i - 1} t^k v_{i,k} \right), \quad \text{où } v_{i,k} \in \Gamma_i, \quad (2.6)$$

avec  $m_i = \max_{1 \leq l \leq e_i} \dim(J_{i,l})$ .

**Démonstration.** Toute solution de  $x'(t) = Ax(t)$  s'écrit  $x(t) = e^{tA}x(0)$ , le théorème résulte donc directement de l'expression (2.5) de  $e^{tA}$ .

On peut aussi l'obtenir simplement à partir du théorème 2.3 de décomposition des noyaux. En effet, dans la décomposition  $\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_r$ , si le vecteur  $x(0)$  s'écrit comme  $x(0) = x_1^0 + \dots + x_r^0$ ,

alors  $x(t) = x_1(t) + \dots + x_r(t)$ , où  $x_i(\cdot)$  est la solution de  $x' = Ax$  telle que  $x_i(0) = x_i^0$ . Or les sous-espaces  $\Gamma_i$  sont invariants par  $A$ , donc par  $e^{tA}$ , et  $A|_{\Gamma_i} = \lambda_i I_{\Gamma_i} + N_i$ . Pour  $i = 1, \dots, r$ , on a donc :

$$x_i(t) = e^{tA|_{\Gamma_i}} x_i^0 = e^{t\lambda_i I_{\Gamma_i} + tN_i} x_i^0 = e^{t\lambda_i} e^{tN_i} x_i^0,$$

d'après la proposition 2.1, puisque  $\lambda_i I_{\Gamma_i}$  et  $N_i$  commutent. D'autre part  $e^{tN_i} = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(tN_i)^k}{k!}$  où  $m_i$  est l'ordre de nilpotence de  $N_i$  (rappelons que  $m_i = \max_{1 \leq l \leq e_i} \dim(J_{i,l})$ , voir la remarque 2.1). On obtient ainsi

$$x_i(t) = e^{t\lambda_i} \sum_{k=0}^{m_i-1} t^k \frac{N_i^k x_i^0}{k!},$$

c'est-à-dire l'expression cherchée en posant

$$v_{i,k} = \frac{1}{k!} N_i^k x_i^0.$$

□

*Remarque 2.3.*

- Le terme en facteur de  $e^{t\lambda_i}$  est polynôme en  $t$  quand  $m_i > 1$ , et constant quand  $m_i = 1$ . Rappelons que ce dernier cas a lieu si et seulement si les multiplicités algébrique et géométrique de  $\lambda_i$  coïncident.
- Il est également important de noter la dépendance de  $x(t)$  par rapport à la condition initiale  $x(0)$  dans l'expression (2.6). Si  $x(0)$  s'écrit comme  $x(0) = x_1^0 + \dots + x_r^0$  dans la décomposition  $\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_r$ , alors

$$v_{i,k} = \frac{1}{k!} N_i^k x_i^0,$$

où  $N$  est la matrice nilpotente de la décomposition (2.3)  $\Delta + N$  de  $P^{-1}AP$ . En particulier,  $x_i^0 = 0$  si et seulement si tous les vecteurs  $v_{i,k}$  sont nuls.

Considérons maintenant une matrice  $A$  à coefficients réels et une solution  $x(\cdot)$  dans  $\mathbb{R}^n$  de  $x' = Ax$ , dont la condition initiale est  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ . On peut bien entendu considérer  $A$  comme une matrice à coefficients complexes et  $x(\cdot) = x(\cdot) + i0$  comme la solution dans  $\mathbb{C}^n$  de  $x' = Ax$  ayant pour condition initiale  $x(0) + i0$ . L'expression de  $x(\cdot)$  est donc donnée par la formule (2.6). Puisque cette solution est réelle, elle est en fait égale à la partie réelle de la formule (2.6), la partie imaginaire devant être nulle. On obtient ainsi la forme générale suivante pour les solutions de  $x' = Ax$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 2.7.** *Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Toute solution de  $x'(t) = Ax(t)$  dans  $\mathbb{R}^n$  s'écrit sous la forme*

$$x(t) = \sum_{1 \leq i \leq q} e^{t\alpha_i} \left( \sum_{0 \leq k \leq m_i-1} t^k (\cos(\beta_i t) a_{i,k} + \sin(\beta_i t) b_{i,k}) \right), \quad (2.7)$$

où  $\alpha_i = \Re(\lambda_i)$ ,  $\beta_i = \Im(\lambda_i)$  et les vecteurs  $a_{i,k}, b_{i,k}$  appartiennent à  $E_i$ .

*Remarque 2.4.* Comme dans le théorème 2.6, les vecteurs  $a_{i,k}$ ,  $b_{i,k}$  dépendent uniquement de la condition initiale  $x(0)$ . Si  $x(0)$  s'écrit comme  $x(0) = x_1^0 + \dots + x_q^0$  dans  $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_q$ , alors  $x_i^0 = 0$  si et seulement si tous les vecteurs  $a_{i,k}$  et  $b_{i,k}$  sont nuls.

### Comportement asymptotique.

Les théorèmes 2.6 et 2.7 donnent toutes les informations que l'on peut souhaiter sur l'équation différentielle, généralisant les résultats de la section 2.1 sur les équations scalaires et les systèmes d'équations découplées. On constate en particulier que le comportement quand  $t$  tend vers l'infini des solutions  $x(t)$  de  $x'(t) = Ax(t)$  dépend essentiellement des signes des parties réelles des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$ . Plus précisément, on peut décomposer le comportement des composantes de  $x(t)$  sur chaque sous-espace caractéristique (on suppose ici  $A$  réelle) :

- si  $\Re(\lambda_i) < 0$  la projection sur  $E_i$  de  $x(t)$  s'annule quand  $t$  tend vers  $+\infty$  et croît de façon au moins exponentielle en  $-\infty$ ;
- si  $\Re(\lambda_i) > 0$ , c'est l'inverse, la projection sur  $E_i$  de  $x(t)$  croît de façon au moins exponentielle en  $+\infty$  et s'annule quand  $t$  tend vers  $-\infty$ ;
- si  $\Re(\lambda_i) = 0$ , la composante sur  $E_i$  de  $x(t)$  croît de façon polynômiale en  $\pm\infty$  quand  $\dim \Pi_i < p_i$ , et est bornée pour  $t \in \mathbb{R}$  quand  $\dim \Pi_i = p_i$ .

Il est commode de regrouper les sous-espaces caractéristiques en fonction du signe de la partie réelle des valeurs propres correspondantes. Nous définissons ainsi, pour  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , les sous-espaces vectoriels suivant de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned}
 - \text{l'espace } \textit{stable} : & \quad E^s = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) < 0} \Gamma_i \right] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) < 0} E_i, \\
 - \text{l'espace } \textit{instable} : & \quad E^u = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) > 0} \Gamma_i \right] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) > 0} E_i, \\
 - \text{l'espace } \textit{indifférent} : & \quad E^c = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) = 0} \Gamma_i \right] \cap \mathbb{R}^n = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) = 0} E_i.
 \end{aligned}$$

La somme de ces espaces est  $\mathbb{R}^n$  tout entier :  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ . De même, pour  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , les espaces complexes *stable*, *instable*<sup>1</sup> et *indifférent*<sup>2</sup> sont définis respectivement comme

$$\Gamma^s = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) < 0} \Gamma_i, \quad \Gamma^u = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) > 0} \Gamma_i, \quad \Gamma^c = \bigoplus_{\Re(\lambda_i) = 0} \Gamma_i,$$

<sup>1</sup> « unstable » en anglais, d'où le 'u' des notations  $E^u$  et  $\Gamma^u$

<sup>2</sup> « common » en anglais, d'où le 'c' des notations  $E^c$  et  $\Gamma^c$

et on a la décomposition  $\mathbb{C}^n = \Gamma^s \oplus \Gamma^u \oplus \Gamma^c$ .

D'après le théorème de décomposition des noyaux, ces espaces ont la particularité d'être invariants par  $e^{tA}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :  $e^{tA}E^s \subset E^s$ ,  $e^{tA}E^u \subset E^u$ , etc... Ce qui entraîne que, si une solution  $x(\cdot)$  de  $x'(t) = Ax(t)$  vérifie par exemple  $x(0) \in E^s$ , alors  $x(t) \in E^s$  pour tout  $t$ ; si  $x(0) \in E^c$ , alors  $x(t) \in E^c$  pour tout  $t$ , etc.

Les espaces stable, instable et indifférent correspondent chacun à un certain type de comportement asymptotique des solutions. Nous résumons ces comportements dans le théorème suivant, dont la démonstration est laissée en exercice (utiliser soit la forme générale des solutions, soit directement la réduction de Jordan).

**Théorème 2.8.** *Soit  $A$  une matrice ( $n \times n$ ) réelle (resp. complexe). Notons  $x(\cdot)$  les solutions dans  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ) de l'équation différentielle  $x'(t) = Ax(t)$ . Alors*

- $E^s$  (resp.  $\Gamma^s$ ) est l'ensemble des  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $x(0) \in \mathbb{C}^n$ ) pour lesquels

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0;$$

- $E^u$  (resp.  $\Gamma^u$ ) est l'ensemble des  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $x(0) \in \mathbb{C}^n$ ) pour lesquels

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|x(t)\| = 0;$$

- $E^c$  (resp.  $\Gamma^c$ ) est l'ensemble des  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  (resp.  $x(0) \in \mathbb{C}^n$ ) pour lesquels il existe un entier  $m \geq 0$  et une constante  $C > 0$  tels que, pour  $|t|$  suffisamment grand,

$$C^{-1} \|x(0)\| \leq \|x(t)\| \leq C |t|^m \|x(0)\|.$$

En outre, pour  $0 < \alpha < \min_{\Re(\lambda_i) \neq 0} |\Re(\lambda_i)|$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :

- si  $x(0) \in E^s$  (ou  $\Gamma^s$ ), alors, pour tout  $t > 0$  assez grand,

$$\|x(t)\| \leq C e^{-\alpha t} \|x(0)\|, \quad \|x(-t)\| \geq C^{-1} e^{\alpha t} \|x(0)\|;$$

- si  $x(0) \in E^u$  (ou  $\Gamma^u$ ), alors, pour tout  $t > 0$  assez grand,

$$\|x(t)\| \geq C^{-1} e^{\alpha t} \|x(0)\|, \quad \|x(-t)\| \leq C e^{-\alpha t} \|x(0)\|.$$

*Remarque 2.5.* Dans la caractérisation de  $E^c$ , l'entier  $m$  est inférieur ou égal à  $n-1$ . On peut prendre  $m = 0$  si et seulement si  $A|_{E^c}$  est diagonalisable (puisque dans ce cas, pour toute valeur propre, multiplicités algébrique et géométrique coïncident).

Ce théorème est très important puisqu'il permet de faire le lien entre des espaces définis de façon purement algébrique (les  $E^s, E^u$ , etc), donc calculables, et des ensembles de points ayant des propriétés dynamiques données. Pour obtenir

le comportement asymptotique d'une solution particulière  $x(\cdot)$ , il suffit donc de décomposer sa condition initiale  $x(0)$  en  $x^s(0) + x^u(0) + x^c(0)$  dans  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ . On sait alors que la décomposition de  $x(t)$  est  $x(t) = x^s(t) + x^u(t) + x^c(t)$ , où  $x^s(\cdot)$  (resp.  $x^u(\cdot)$ ,  $x^c(\cdot)$ ) est la solution de  $x'(t) = Ax(t)$  ayant  $x^s(0)$  (resp.  $x^u(0)$ ,  $x^c(0)$ ) pour condition initiale. En particulier, si on s'intéresse aux temps positifs, on a les critères suivants :

- si  $x^u(0) \neq 0$ , alors  $\|x(t)\|$  tend vers l'infini quand  $t \rightarrow +\infty$ ;
- si  $x^c(0) \neq 0$ , alors  $\|x(t)\|$  ne tend pas vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  (mais  $\|x(t)\|$  ne tend pas forcément vers l'infini).

**Corollaire 2.1.** *Toutes les solutions de  $x'(t) = Ax(t)$  tendent vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle strictement négatives (c'est-à-dire  $E^s = \mathbb{R}^n$  ou  $\Gamma^s = \mathbb{C}^n$ ).*

Quand c'est le cas, on dit que 0 est un *équilibre asymptotiquement stable* de l'équation. Nous reviendrons sur les notions d'équilibre et de stabilité dans le chapitre 5.

*Remarque 2.6.* Pour une équation différentielle  $x' = Ax$  dans  $\mathbb{R}^2$ , le signe des parties réelles des valeurs propres se déduit directement des signes du déterminant et de la trace de  $A$ . En effet,  $\det A$  est le produit des valeurs propres et  $\operatorname{tr} A$  est la somme de leurs parties réelles. Ainsi, en notant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $A$  :

- si  $\det A < 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles et de signe opposé (elles ne peuvent être complexes, car dans ce cas  $\det A = |\lambda_1|^2$ );
- si  $\det A > 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont soit réelles et de même signe, soit complexes conjuguées; dans les deux cas, les parties réelles de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de même signe, qui est celui de  $\operatorname{tr} A$ ; notons que, si  $\operatorname{tr} A = 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont forcément complexes conjuguées de partie réelle nulle;
- si  $\det A = 0$ , une des valeurs propres est nulle, l'autre étant égale à  $\operatorname{tr} A$ .

On peut donc obtenir directement les dimensions des espaces stables, instables et indifférents en fonction des signes de la trace et du déterminant de  $A$  (voir aussi l'exercice 2.2).

*\*Pour en savoir plus...*

Nous dirons qu'une matrice  $A$  est *hyperbolique* si elle n'a aucune valeur propre de partie réelle nulle. Pour une telle matrice, on a  $\Gamma^c = \{0\}$ , c'est-à-dire que  $\mathbb{C}^n = \Gamma^s \oplus \Gamma^u$  et  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$  si  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ .

La classe des matrices hyperboliques est d'un intérêt particulier puisqu'elle est stable par perturbation.



**Théorème 2.9.** *Si  $A$  est une matrice hyperbolique, il existe un réel  $\delta > 0$  (dépendant de  $A$ ) tel que pour toute matrice  $F$  vérifiant*

$$\|F\| \leq \delta,$$

*la matrice  $A + F$  est encore hyperbolique. L'ensemble des matrices hyperboliques complexes (resp. réelles) est donc ouvert dans  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  (resp.  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ).*

*En outre, les espaces stable et instable dépendent continûment de  $F$  (pour  $\|F\| \leq \delta$ ).*

**Démonstration.** Le fait que si  $F$  est assez petite  $A + F$  est hyperbolique résulte de la continuité des valeurs propres des matrices : les valeurs propres de  $A + F$  sont d'autant plus proches de celles de  $A$  que  $F$  est petite; or celles-ci sont dans l'ouvert  $\mathbb{C} - \{\Re e = 0\}$ . Il en est donc de même de celles de  $F$  si elle est assez petite.  $\square$

*Remarque 2.7.* Alors que la dépendance des espaces caractéristiques de  $A + F$  n'est pas en général continue par rapport à  $F$ , celle des espaces stable et instable l'est.

### Cas d'une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (ou semi-simple).

Considérons le cas particulier d'une matrice  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  (on dit aussi *semi-simple*). Comme nous l'avons vu dans la section 2.3, ceci signifie que  $A$  satisfait les conditions suivantes, qui sont équivalentes entre elles (nous utilisons les notations de la section 2.3) :

- il existe une base de  $\mathbb{C}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ ;
- $\mathbb{C}^n = \Pi_1 \oplus \dots \oplus \Pi_r$ , où  $\Pi_i = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda_i I) \subset \mathbb{C}^n$  est le sous-espace propre associé à  $\lambda_i$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont les valeurs propres (complexes) de  $A$ ;
- pour toute valeur propre  $\lambda_i$ , le sous-espace caractéristique (complexe) est égal au sous-espace propre :  $\Gamma_i = \Pi_i$ ;
- pour toute valeur propre, les multiplicités géométrique et algébrique coïncident :  $\dim \Pi_i = p_i$  pour  $i = 1, \dots, r$ ;
- dans la forme réduite de Jordan complexe de la matrice  $A$ , tous les blocs de Jordan sont des matrices  $1 \times 1$  :  $J_{i,k} = (\lambda_i)$ .

Ce cas est en pratique très important, puisque l'ensemble des matrices de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisables dans  $\mathbb{C}$  contient un ensemble ouvert et dense dans  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Autrement dit, être diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  est une propriété générique sur  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  (voir la discussion de ce point dans [5, chap. 7]).

Considérons donc une telle matrice  $A$ . La forme générale des solutions de  $x' = Ax$  donnée par le théorème 2.7 se simplifie : tous les termes polynômiaux en  $t$  disparaissent, seuls restent les termes exponentiels et trigonométriques.

**Corollaire 2.2.** Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ . Toute solution de  $x'(t) = Ax(t)$  dans  $\mathbb{R}^n$  s'écrit sous la forme

$$x(t) = \sum_{1 \leq j \leq q} e^{t\alpha_j} (\cos(\beta_j t) a_j + \sin(\beta_j t) b_j),$$

où  $\alpha_j = \Re(\lambda_j)$ ,  $\beta_j = \Im(\lambda_j)$  et les vecteurs  $a_j$  et  $b_j \in \mathbb{R}^n$  sont tels que  $a_j + ib_j$  est un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda_j$  (i.e.  $a_j + ib_j \in \Pi_j$ ).

Les sous-espaces stables, instables et indifférents s'écrivent maintenant en fonction des sous-espaces propres (puisque ceux-ci sont égaux aux sous-espaces caractéristiques complexes) :

$$E^s = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) < 0} \Pi_i \right] \cap \mathbb{R}^n, \quad E^u = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) > 0} \Pi_i \right] \cap \mathbb{R}^n, \quad E^c = \left[ \bigoplus_{\Re(\lambda_i) = 0} \Pi_i \right] \cap \mathbb{R}^n.$$

La caractérisation dynamique de ces espaces résulte du théorème 2.8.

**Corollaire 2.3.** Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ . Notons  $x(\cdot)$  les solutions dans  $\mathbb{R}^n$  de l'équation différentielle  $x'(t) = Ax(t)$ . Alors

- $E^s$  est l'ensemble des conditions initiales  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  correspondant à des solutions  $x(t)$  qui tendent exponentiellement vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ ;
- $E^u$  est l'ensemble des conditions initiales  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  correspondant à des solutions  $x(t)$  qui tendent exponentiellement vers 0 quand  $t \rightarrow -\infty$ ;
- $E^c$  est l'ensemble des conditions initiales  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  correspondant à des solutions  $x(t)$  périodiques, donc bornées sur  $\mathbb{R}$ .

La seule différence par rapport au cas général concerne l'espace  $E^c$  : alors que dans le cas général le comportement asymptotique des solutions dans  $E^c$  était indéterminé (d'où le nom d'espace « indifférent »), on sait ici que toutes les solutions dans  $E^c$  sont bornées.

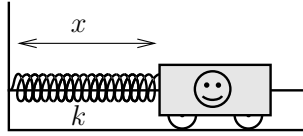
## 2.5 Exercices corrigés

**Exercice 2.1.** L'écart à l'équilibre  $x(t)$  d'un chariot de masse  $m$  attaché à un ressort de raideur  $k > 0$  satisfait

$$mx'' + \lambda x' + kx = 0, \tag{2.8}$$

où  $\lambda > 0$  modélise les frottements. On posera pour simplifier  $\alpha = \frac{\lambda}{2m}$  et  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

1. Écrire l'équation différentielle (2.8) sous la forme d'une équation différentielle  $X' = AX$  dans  $\mathbb{R}^2$ .



2. Déterminer, en fonction de  $\alpha$  et  $\omega_0^2$ , les valeurs propres de la matrice  $A$ . Dans quels cas  $A$  est-elle diagonalisable?

3. Calculer une forme réduite de  $e^{tA}$  (c'est-à-dire  $Pe^{tA}P^{-1}$  pour une matrice de changement de base  $P$ ), puis donner sur un dessin l'allure des solutions de  $X' = AX$  en tant que courbes paramétrées de  $\mathbb{R}^2$  (i.e. le *portrait de phase*, voir section 4.3) dans chacun des cas suivants :

- (a) frottements importants, i.e.  $\alpha^2 > \omega_0^2$ ; on montrera que les courbes  $X(t)$  solutions de l'équation différentielle présentent alors une asymptote pour  $t \rightarrow \infty$ ;
- (b) frottements faibles, i.e.  $0 < \alpha^2 < \omega_0^2$ ;
- (c) mouvement sans frottements, i.e.  $\alpha = 0$ ; on montrera que les solutions  $X(t)$  sont des ellipses.

4. Mêmes questions dans le cas intermédiaire  $\alpha^2 = \omega_0^2$ . Montrer en particulier que les solutions  $X(t)$  présentent une asymptote pour  $t \rightarrow \infty$ .

5. Généralisation : Classification des systèmes dynamiques à 2 dimensions

Soit  $A$  une matrice réelle  $2 \times 2$ . Indiquer, en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice  $A$ , l'allure du portrait de phase de l'équation différentielle  $x' = Ax$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

### Corrigé de l'exercice 2.1.

1. En posant  $X = (x, x')$ , on obtient  $X' = AX$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Les valeurs propres sont solutions de  $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$  où  $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  est le polynôme caractéristique de  $A$ . On distingue donc 3 possibilités, selon le signe du discriminant  $\Delta = \alpha^2 - \omega_0^2$  :

(i) si  $\Delta > 0$  : les valeurs propres sont  $\lambda_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\Delta}$ , toutes deux réelles et distinctes (et négatives). La matrice  $A$  est donc diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

(ii) si  $\Delta = 0$  :  $-\alpha$  est valeur propre double. La matrice  $A$  ne peut pas être diagonalisable, sinon elle serait égale à  $-\alpha I$  car on aurait alors  $A = P(-\alpha I)P^{-1}$ .

(iii) si  $\Delta < 0$  : les valeurs propres sont  $\mu_{\pm} = -\alpha \pm i\sqrt{-\Delta}$ , imaginaires conjuguées. La matrice  $A$  est donc diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  mais pas dans  $\mathbb{R}$ .

**3.** On peut traiter cette question rapidement en utilisant la réduction de Jordan réelle de la matrice  $A$ . Dans ce corrigé, on va plutôt faire un raisonnement “à la main”.

(a)  $\alpha^2 > \omega_0^2$ . On est dans le cas du 2.(i). Il existe une base de  $\mathbb{R}^2$  formée de vecteurs propres  $v_-, v_+$  de la matrice  $A$  et, en notant  $P$  la matrice dont les colonnes sont  $v_+, v_-$ , on obtient

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Dans ce cas, l'exponentielle se calcule aisément,

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pour simplifier l'étude, posons  $Y(t) = P^{-1}X(t)$  (changement linéaire de coordonnées). En notant  $Y(0) = (y_1^0, y_2^0)$ , on obtient

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} y_1^0 \\ e^{\lambda_- t} y_2^0 \end{pmatrix}.$$

Les fonctions  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont donc monotones, tendent vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  et vers  $+\infty$  quand  $t \rightarrow -\infty$ . De plus :

- si  $y_1^0 \neq 0$ , alors  $y_2(t)/y_1(t) = e^{-2t\sqrt{\Delta}} \rightarrow 0$ , donc l'axe  $Oy_1$  est asymptote pour  $t \rightarrow +\infty$ ;
- si  $y_1^0 = 0$ , la trajectoire est contenue dans l'axe  $Oy_2$ , qui est alors asymptote pour  $t \rightarrow +\infty$ .

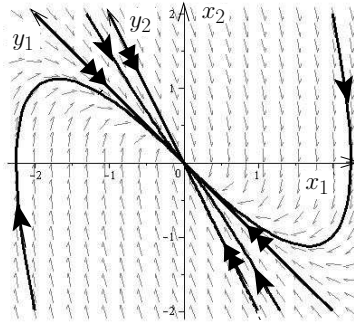
Ces propriétés permettent de donner l'allure des solutions en tant que courbes paramétrées de  $\mathbb{R}^2$ , comme indiqué figure 2.1.

(b)  $0 < \alpha^2 < \omega_0^2$ . On est dans le cas 2.(iii) et nous allons utiliser le même raisonnement que pour obtenir la réduction de Jordan réelle (voir page 34). Soit  $w = a + ib \in \mathbb{C}^2$  un vecteur propre non nul de  $A$  associé à  $\mu_+$ . On sait que  $a$  et  $b \in \mathbb{R}^2$  sont linéairement indépendants (sinon  $a$  ou  $b$  serait un vecteur propre réel associé à la valeur propre non réelle  $\mu_+$ , ce qui est impossible). De plus, en identifiant les parties réelles et imaginaires de l'expression  $Aw = \mu_+ w$ , on obtient

$$Aa = \Re(\mu_+)a - \Im(\mu_+)b, \quad \text{et} \quad Ab = \Im(\mu_+)a + \Re(\mu_+)b.$$

En notant  $P$  la matrice dont les vecteurs colonnes sont  $a$  et  $b$ , il vient

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \Re(\mu_+) & \Im(\mu_+) \\ -\Im(\mu_+) & \Re(\mu_+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & \sqrt{-\Delta} \\ -\sqrt{-\Delta} & -\alpha \end{pmatrix}, \quad P \in GL_n(\mathbb{R}).$$



**Fig. 2.1.** Cas  $\alpha^2 > \omega_0^2$

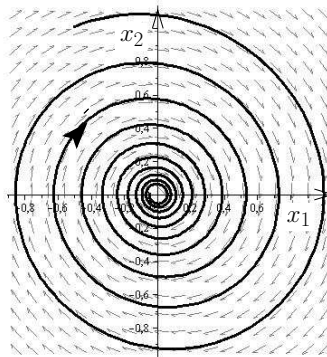
Pour calculer  $e^{tA}$ , il suffit de remarquer que  $w = a + ib$  est aussi vecteur propre de  $e^{tA}$  associé à la valeur propre  $e^{t\mu+} = e^{-\alpha t}(\cos(\sqrt{-\Delta}t) + i \sin(\sqrt{-\Delta}t))$ . Le raisonnement ci-dessus s'applique donc aussi à  $e^{tA}$  et on obtient

$$P^{-1}e^{tA}P = \begin{pmatrix} \Re(e^{t\mu+}) & \Im(e^{t\mu+}) \\ -\Im(e^{t\mu+}) & \Re(e^{t\mu+}) \end{pmatrix} = e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{-\Delta}t) & \sin(\sqrt{-\Delta}t) \\ -\sin(\sqrt{-\Delta}t) & \cos(\sqrt{-\Delta}t) \end{pmatrix}.$$

Pour  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , on obtient

$$Y(t) = e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{-\Delta}t) & \sin(\sqrt{-\Delta}t) \\ -\sin(\sqrt{-\Delta}t) & \cos(\sqrt{-\Delta}t) \end{pmatrix} Y(0) = e^{-\alpha t} \text{Rot}(-\sqrt{-\Delta}t) Y(0),$$

où  $\text{Rot}(\theta)$  désigne la rotation d'angle  $\theta$ . Les courbes  $Y(t)$  "spiralent" donc vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ , le sens de rotation dans les coordonnées  $Y$  étant le sens trigonométrique inverse (voir figure 2.2).



**Fig. 2.2.** Cas  $0 < \alpha^2 < \omega_0^2$

(c)  $\alpha = 0$ . On est à nouveau dans le cas 2.(iii). Comme au (b), la matrice  $A$  peut se mettre sous la forme

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P \in GL_n(\mathbb{R}).$$

L'exponentielle de  $A$  se calcule alors comme précédemment,

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} P^{-1} = P \text{Rot}(-\omega_0 t) P^{-1}.$$

Pour  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , on obtient

$$Y(t) = \text{Rot}(-\omega_0 t)Y(0).$$

Ainsi les courbes  $Y(t)$  décrivent des cercles, et les courbes  $X(t) = PY(t)$  décrivent des ellipses (voir figure 2.3).

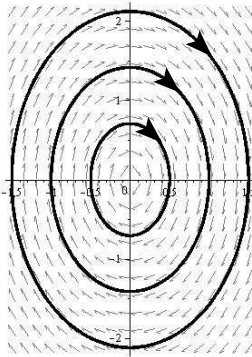


Fig. 2.3. Cas  $\alpha = 0$

4. Quand  $\alpha^2 = \omega_0^2$ , on est dans le cas 2.(ii). Soient  $v \in \mathbb{R}^2$  un vecteur propre non nul de  $A$  (associé à  $-\alpha$ ) et  $w \in \mathbb{R}^2$  tels que  $(v, w)$  forme une base de  $\mathbb{R}^2$ . L'image de  $w$  par  $A$  s'écrit  $Aw = \beta w + \gamma v$ , avec  $\gamma \neq 0$  puisque  $w$  ne peut pas être un vecteur propre. Quitte à remplacer  $v$  par  $v/\gamma$ , on peut de plus supposer  $\gamma = 1$ . D'autre part on a forcément  $\beta = -\alpha$  : en effet, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $P_A(A) = (A + \alpha I)^2 = 0$ , d'où  $(A + \alpha I)^2 w = (\beta + \alpha)^2 w + (\beta + \alpha)v = 0$ , ce qui implique  $\beta = -\alpha$  puisque  $v$  et  $w$  sont linéairement indépendants.

En notant  $P$  la matrice dont les vecteurs colonnes sont  $v$  et  $w$ , on obtient donc

$$A = P \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Pour calculer l'exponentielle, remarquons que

$$P^{-1}AP = -\alpha I_2 + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui implique que l'exponentielle de  $tA$  s'écrit  $e^{tA} = Pe^{-\alpha t}e^{tN}P^{-1}$ . Comme  $N^2 = 0$ , l'exponentielle de  $tN$  est  $e^{tN} = I + tN$  et l'exponentielle de  $tA$  est

$$e^{tA} = Pe^{-\alpha t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Pour  $Y(t) = P^{-1}X(t)$ , on obtient

$$Y(t) = e^{-\alpha t} \begin{pmatrix} y_1^0 + ty_2^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}.$$

Les fonctions  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  tendent vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ , vers  $+\infty$  quand  $t \rightarrow -\infty$ , mais  $y_1(t)$  n'est pas monotone. De plus :

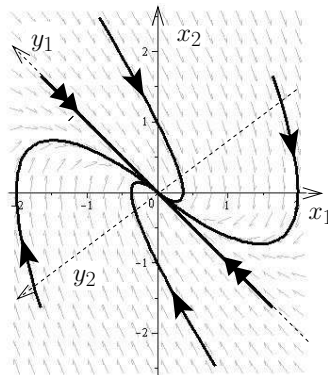
- si  $y_2^0 \neq 0$ , alors, pour  $t$  suffisamment grand,

$$\frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \frac{y_2^0}{y_1^0 + ty_2^0} \sim \frac{1}{t} \rightarrow 0$$

donc l'axe  $Oy_1$  est asymptote et les fonctions  $y_1$  et  $y_2$  ont même signe pour  $t \rightarrow +\infty$ ;

- si  $y_2^0 = 0$ , la trajectoire est contenue dans l'axe  $Oy_1$ , qui est à nouveau asymptote.

On obtient alors l'allure des solutions de la figure 2.4.



**Fig. 2.4.** Cas  $\alpha^2 = \omega_0^2$ .

5. Soient  $\lambda_1, \lambda_2$  les valeurs propres de  $A$ , qui sont toujours complexes conjuguées puisque  $A$  est à coefficients réels. Trois cas peuvent se produire, selon que ces valeurs propres sont distinctes et réelles, distinctes et non réelles ou enfin égales.

(i) Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  sont toutes les deux réelles,  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1},$$

et l'allure des solutions dépend des signes respectifs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On a représenté les différentes possibilités dans la figure 2.5, où  $E_1$  (resp.  $E_2$ ) est le sous-espace caractéristique – ici égal au sous-espace propre – associé à la valeur propre  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ).

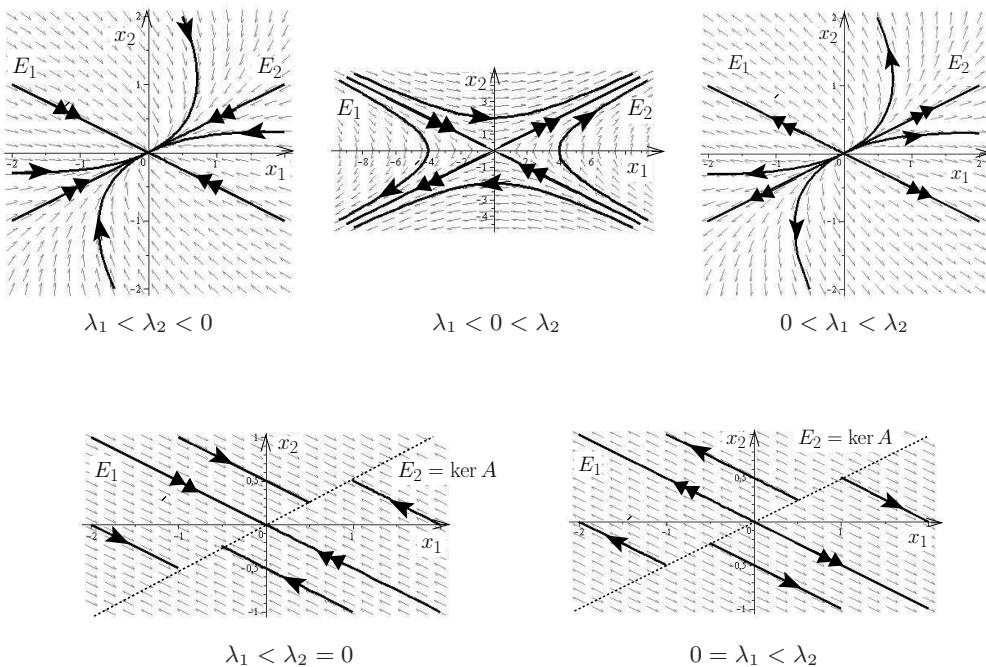


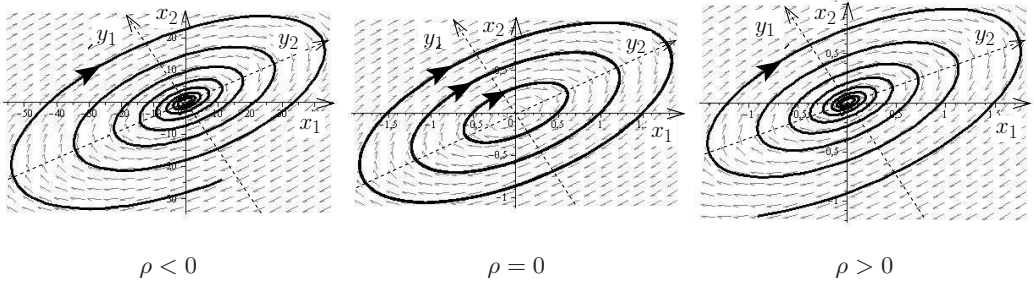
Fig. 2.5. Portraits de phase avec  $\lambda_1, \lambda_2$  réels distincts.



(ii) Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ne sont pas réelles, elles sont de la forme  $\lambda_1 = \rho + i\theta$ ,  $\lambda_2 = \rho - i\theta$  avec  $\theta \neq 0$ . On voit alors, en utilisant le raisonnement de la question **3.(b)** ou la réduction de Jordan réelle, qu'il existe  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \rho & \theta \\ -\theta & \rho \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad e^{tA} = P \left[ e^{t\rho} \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & \sin(t\theta) \\ -\sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix} \right] P^{-1},$$

c'est-à-dire que  $e^{tA}$  est conjuguée à une matrice de similitude (homothétie multipliée par rotation). L'allure des solutions dépend du signe de  $\rho$ . On a représenté les différentes possibilités dans la figure 2.6, où les coordonnées  $y = (y_1, y_2)$  sont égales à  $P^{-1}x$ . Notez que le sens de rotation dans les coordonnées  $y$  est donné par le signe de  $\theta$ , les dessins de la figure 2.6 ayant été fait avec  $\theta < 0$  (d'où un sens de rotation trigonométrique dans les coordonnées  $y$ ).



**Fig. 2.6.** Portraits de phase avec  $\lambda_1, \lambda_2$  complexes conjugués distincts.

(iii) Si les valeurs propres sont égales,  $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$ , alors elles sont réelles, et il existe  $P \in GL_2(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad a = 0 \text{ ou } 1,$$

et donc,

$$e^{tA} = P \left[ e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & at \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] P^{-1}.$$

Les solutions peuvent avoir plusieurs formes différentes, représentées dans la figure 2.7, selon le signe de  $\lambda$  et la valeur de  $a$  :

- si  $a = 0$  et  $\lambda \neq 0$ ,  $A$  est diagonalisable et s'écrit donc comme  $A = \lambda I$ ; les solutions décrivent des demi-droites et tendent vers 0 ou s'en éloignent selon le signe de  $\lambda$ ;
- si  $a = 0$  et  $\lambda = 0$ ,  $A$  est la matrice nulle et les solutions sont toutes constantes;

- si  $a = 1$ ,  $A$  est non diagonalisable, c'est-à-dire que le sous-espace propre  $\Delta = \ker(A - \lambda I)$  associé à  $\lambda$  est de dimension 1. Si  $\lambda \neq 0$ , l'étude est la même qu'à la question 4.; en revanche, dans le cas où  $\lambda = 0$ , les trajectoires sont des droites parallèles à  $\Delta$  et leur équation, en coordonnées  $y = P^{-1}x$ , est  $y_1(t) = y_1(0) + ty_2(0)$ ,  $y_2(t) = y_2(0)$ .

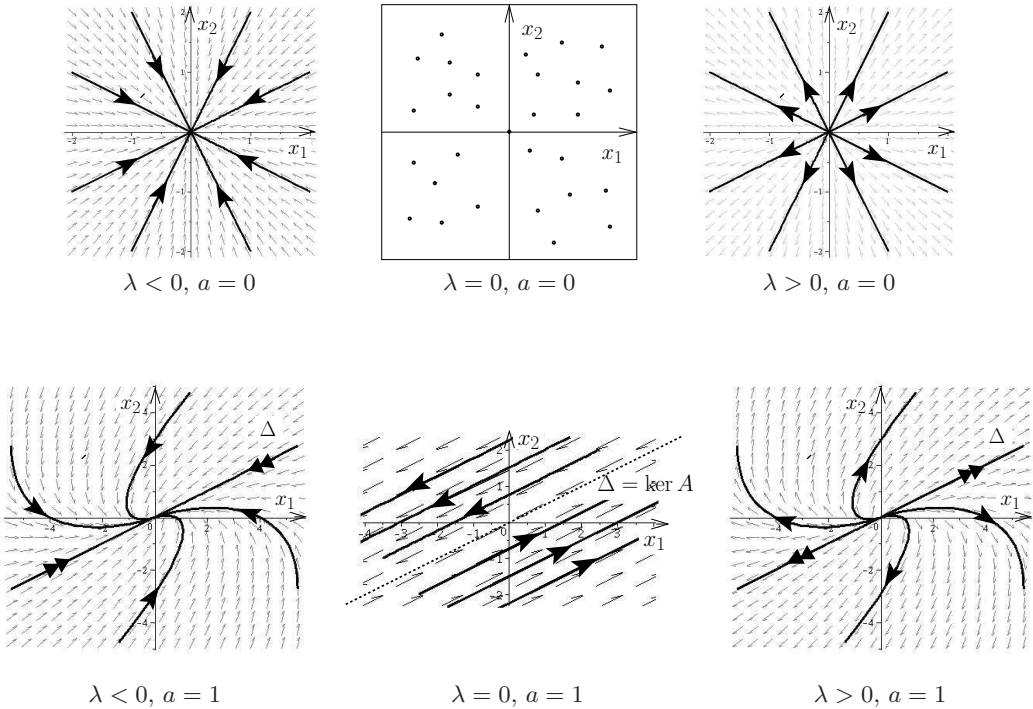


Fig. 2.7. Portraits de phase avec  $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$ .

**Exercice 2.2.** Soit  $B$  une matrice réelle  $2 \times 2$  de trace nulle.

1. Montrer que  $B^2 = -\det(B)I$ . En déduire que  $e^{tB}$  s'écrit

$$e^{tB} = \alpha(t)I + \beta(t)B.$$

On exprimera  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  sous forme de séries entières, puis à l'aide de fonctions élémentaires (distinguer des cas selon le signe de  $\det B$ ).

Considérons maintenant une matrice  $A$  réelle  $2 \times 2$  et posons  $B = A - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A)I$ .

2. Montrer que  $\operatorname{tr}(B) = 0$  et calculer  $\det(B)$  en fonction de  $\operatorname{tr}(A)$  et  $\det(A)$ .

3. Écrire  $e^{tA}$  et décrire le comportement asymptotique des solutions de  $x' = Ax$  en fonction de  $\text{tr}(A)$  et  $\det(A)$ . Commenter la figure 2.8 (on pourra également faire le lien avec la classification de la fin de l'exercice 2.1).

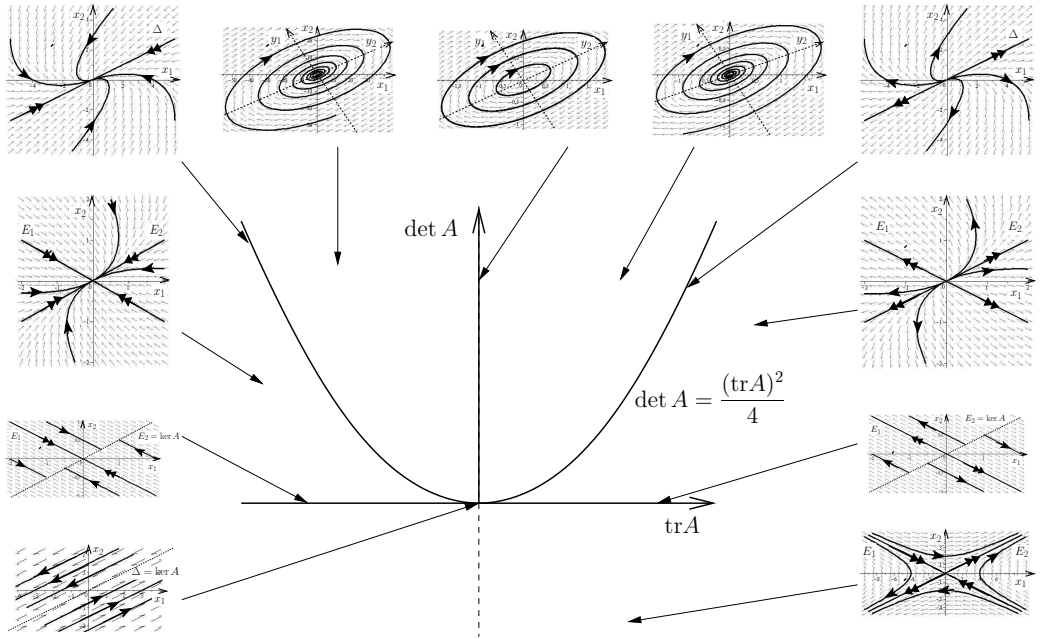


Fig. 2.8. Diagramme de bifurcation dans le plan  $(\text{tr}(A), \det(A))$ .

### Corrigé de l'exercice 2.2.

1. Le polynôme caractéristique de  $B$  est

$$P_B(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(B)\lambda + \det(B) = \lambda^2 + \det(B),$$

puisque  $\text{tr}(B) = 0$ . D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $P_B(B) = 0$ , ce qui implique  $B^2 = -\det(B)I$ . Les puissances de  $B$  s'écrivent donc  $B^{2p} = (B^2)^p = (-\det(B))^p I$  et  $B^{2p+1} = BB^{2p} = (-\det(B))^p B$ . L'exponentielle  $e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} (tB)^k / k!$  s'écrit alors sous la forme  $\alpha(t)I + \beta(t)B$ , avec

$$\alpha(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (-\det(B))^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad \beta(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (-\det(B))^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

On reconnaît dans ces séries des sinus et cosinus trigonométriques ou hyperboliques, selon le signe de  $\det(B)$ . Plus précisément :

$$\begin{aligned} - \text{ si } \det(B) > 0 : \quad & \alpha(t) = \cos(\sqrt{\det(B)} t), & \beta(t) &= \frac{\sin(\sqrt{\det(B)} t)}{\sqrt{\det(B)}}; \\ - \text{ si } \det(B) = 0 : \quad & \alpha(t) = 1, & \beta(t) &= t; \\ - \text{ si } \det(B) < 0 : \quad & \alpha(t) = \cosh(\sqrt{-\det(B)} t), & \beta(t) &= \frac{\sinh(\sqrt{-\det(B)} t)}{\sqrt{-\det(B)}}. \end{aligned}$$

**2.** La trace de  $B$  est clairement nulle. Soit  $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  le polynôme caractéristique de  $A$ . Rappelons que  $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$ . Le déterminant de  $B$  s'obtient comme

$$\det(B) = \det\left(A - \frac{\text{tr}(A)}{2}I\right) = P_A\left(\frac{\text{tr}(A)}{2}\right) = \det(A) - \left(\frac{\text{tr}(A)}{2}\right)^2.$$

**3.** Écrivons  $A$  comme la somme  $\frac{1}{2} \text{tr}(A)I + B$ . Comme ces deux matrices commutent, on obtient

$$e^{tA} = e^{\frac{1}{2} \text{tr}(A)t} e^{tB} = e^{\frac{1}{2} \text{tr}(A)t} (\alpha(t)I + \beta(t)B).$$

L'expression de  $\alpha(t)$  et  $\beta(t)$  dépend de la position du point  $(\text{tr}(A), \det(A))$  par rapport à la parabole  $\det(B) = \det(A) - \left(\frac{\text{tr}(A)}{2}\right)^2 = 0$ .

- Si  $\det(B) > 0$  (au-dessus de la parabole) :

$$e^{tA} = e^{\frac{1}{2} \text{tr}(A)t} \left( \cos(\sqrt{\det(B)} t)I + \frac{\sin(\sqrt{\det(B)} t)}{\sqrt{\det(B)}}B \right);$$

le terme dominant (quand  $t \rightarrow \infty$ ) est  $e^{\frac{1}{2} \text{tr}(A)t}$ , qui tend vers  $\pm\infty$  selon le signe de  $\text{tr}(A)$  (quand  $\text{tr}(A) = 0$ , les orbites sont des ellipses).

- Si  $\det(B) = 0$  (sur la parabole) :

$$e^{tA} = e^{\frac{1}{2} \text{tr}(A)t} (I + tB);$$

le terme dominant est donc toujours  $e^{\frac{1}{2} \text{tr}(A)t}$  (quand  $\text{tr}(A) = 0$ , les orbites sont des droites).

- Si  $\det(B) < 0$  (en-dessous de la parabole) :

$$e^{tA} = e^{\frac{1}{2} \text{tr}(A)t} \left( \cosh(\sqrt{-\det(B)} t)I + \frac{\sinh(\sqrt{-\det(B)} t)}{\sqrt{-\det(B)}}B \right);$$

dans ce cas, le comportement asymptotique est plus compliqué à déterminer. En effet  $e^{tA}$  est alors une combinaison linéaire de termes de la forme  $e^{a_{\pm}t}M$ , où  $M$  est une matrice constante et  $a_{\pm} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{-\det(B)}$ . On peut alors caractériser l'allure des solutions en remarquant que  $a_+$  et  $a_-$  sont de signe opposé si  $\det(A) < 0$ , de même signe que  $\operatorname{tr}(A)$  si  $\det(A) > 0$ , et enfin égales à  $\operatorname{tr}(A)$  et 0 si  $\det(A) = 0$  (voir la figure 2.8).

**Exercice 2.3.** On considère l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^3$ ,

$$x'(t) = Ax(t), \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel  $a$ , si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- (i) toutes les solutions tendent vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ ;
- (ii) toutes les solutions sont bornées pour  $t \geq 0$ .

### Corrigé de l'exercice 2.3.

Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $(\lambda + 1)(\lambda^2 + a)$ .

- Si  $a < 0$  : les valeurs propres sont  $-1$  et  $\pm\sqrt{-a}$ . Il y a donc une valeur propre positive, ce qui implique qu'aucune des deux propriétés n'est vraie.
- Si  $a > 0$  : il y a une valeur propre négative,  $-1$ , et deux valeurs propres distinctes imaginaires pures,  $\pm i\sqrt{a}$ ; les solutions s'écrivent comme des combinaisons linéaires de  $e^{-t}$ ,  $\cos(\sqrt{a}t)$  et  $\sin(\sqrt{a}t)$ , elles sont donc toutes bornées mais ne tendent pas toutes vers 0. La propriété (ii) est vraie mais pas la (i).
- Si  $a = 0$  : il y a une valeur propre négative,  $-1$ , et une valeur propre double, 0. Or le sous-espace propre associé à 0, c'est-à-dire  $\ker A$ , est de dimension 1 (car  $A$  est clairement de rang 2); les solutions s'écrivent comme des combinaisons linéaires de  $e^{-t}$ , 1 et  $t$ , elles ne sont donc pas toutes bornées. Aucune des deux propriétés n'est vraie.

En conclusion, (i) n'est jamais vérifiée, et (ii) est vérifiée si et seulement si  $a > 0$ .

**Exercice 2.4.** On étudie l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^3$

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha\beta & -(\alpha + \beta + \alpha\beta) & (\alpha + \beta + 1) \end{pmatrix} X.$$

1. Vérifier que cette équation est équivalente à une équation différentielle scalaire du troisième ordre.

**2.** Trouver les valeurs propres de la matrice (c'est plus facile qu'on ne pourrait croire).

**3.** Pour quelles valeurs de  $(\alpha, \beta)$  la matrice est-elle diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ ? (on montrera que tout sous-espace propre est de dimension 1).

**4.** Pour les quatre valeurs  $(\pm 1, \pm 1)$  de  $(\alpha, \beta)$ , donner la dimension de l'espace des conditions initiales amenant vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  (resp.  $t \rightarrow -\infty$ ), puis la forme des solutions.

### Corrigé de l'exercice 2.4.

**1.** En posant  $X = (x, y, z)$ , l'équation s'écrit

$$x' = y, \quad x'' = y' = z, \quad x''' = z' = \alpha\beta x - (\alpha + \beta + \alpha\beta)x' + (\alpha + \beta + 1)x''.$$

**2.** Le polynôme caractéristique de la matrice est  $\lambda^3 - (\alpha + \beta + 1)\lambda^2 + (\alpha + \beta + \alpha\beta)\lambda - \alpha\beta$ . Les valeurs propres sont donc  $1, \alpha, \beta$  (remarquer d'abord que 1 est valeur propre).

**3.** Si  $1 \neq \alpha \neq \beta \neq 1$  : la matrice est diagonalisable puisque ses valeurs propres  $\alpha, \beta, 1$  sont 2 à 2 distinctes.

Si  $\alpha = \beta$  ou  $\alpha = 1$  ou  $\beta = 1$  : l'une des valeurs propres  $\lambda$  est de multiplicité  $p$  supérieure à 1 (i.e.  $p = 2$  ou  $3$ ). Dans ce cas, la matrice est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé  $\ker(A - \lambda I)$  est de dimension  $p$ . Or les deux premières lignes de  $A - \lambda I$  sont toujours linéairement indépendantes puisque

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ * & * & * \end{pmatrix};$$

ainsi  $\ker(A - \lambda I)$  est de dimension  $\leq 1$ , et la matrice ne peut pas être diagonalisable (voir aussi la remarque B.1).

**4.** Rappelons que l'espace des conditions initiales amenant vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  (resp.  $t \rightarrow -\infty$ ) est le sous-espace stable  $E^s$  (resp. instable  $E^u$ ), qui est la somme des sous-espaces caractéristiques correspondant aux valeurs propres de partie réelle  $< 0$  (resp.  $> 0$ ). Ici, vu les valeurs de  $(\alpha, \beta)$ , on a  $E^s = E_{-1}$ ,  $E^u = E_1$  et  $E^s \oplus E^u = \mathbb{R}^3$ .

- Si  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$  :  $E^u = E_1 = \mathbb{R}^3$  est de dimension 3. Pour toute solution de l'équation différentielle, toutes les coordonnées tendent vers  $+\infty$ , mais pas forcément de façon monotone. En effet, comme le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1, la matrice est semblable à sa forme de Jordan,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et les solutions sont de la forme  $X(t) = e^t(t^2X_2 + tX_1 + X_0)$ , avec  $X_0, X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3$ .

- Si  $(\alpha, \beta) = (-1, -1)$  :  $E^s = E_{-1}$  est de dimension 2 et  $E^u = E_1$  est de dimension 1. Les solutions sont de la forme  $X(t) = e^tX_0 + e^{-t}(tX_2 + X_1)$ , où  $X_0 \in E^u$  et  $X_1, X_2 \in E^s$ .
- Si  $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$  ou  $(1, -1)$  :  $E^s = E_{-1}$  est de dimension 1 et  $E^u = E_1$  est de dimension 2. Les solutions sont de la forme  $X(t) = e^{-t}X_0 + e^t(tX_2 + X_1)$ , où  $X_0 \in E^s$  et  $X_1, X_2 \in E^u$ .

**Exercice 2.5.** Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A$  est conjuguée à une matrice antisymétrique;
- (ii) toutes les solutions  $x(\cdot)$  de  $x' = Ax$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

**Corrigé de l'exercice 2.5.**

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons d'abord  $A$  antisymétrique. Alors la norme de toute solution  $x(t)$  est constante, et donc bornée, puisque

$$\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) = x'(t)^T x(t) + x(t)^T x'(t) = x(t)^T A^T x(t) + x(t)^T Ax(t) = 0.$$

Supposons maintenant que  $A = P^{-1}BP$ , avec  $B$  antisymétrique. Alors, pour toute solution  $x(t)$  de  $x' = Ax$ , la fonction  $y(t) = Px(t)$  est solution de  $y' = By$ . La norme de  $y(t)$  est donc constante et  $\|x(t)\| = \|P^{-1}y(t)\|$  est bornée.

- (ii)  $\Rightarrow$  (i) Si toutes les solutions de  $x' = Ax$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ , alors, vue la forme générale des solutions, toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle nulle et leurs multiplicités algébrique et géométrique coïncident (en particulier,  $A$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ ). Sa forme réduite de Jordan réelle  $Q^{-1}AQ$ , avec  $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ , s'écrit sous forme d'une matrice diagonale par bloc  $J$ , d'éléments diagonaux  $J_1, \dots, J_s$ , où chaque  $J_j$  est soit une matrice carrée nulle, soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix},$$

$\pm i\beta_j$  étant valeurs propres de  $A$ . Ainsi  $Q^{-1}AQ$  est antisymétrique.

Notez que l'on peut retrouver ce résultat sans faire appel aux formes de Jordan réelles en procédant comme à l'exercice 2.1, question 3 (b).

**Exercice 2.6.** Si  $A, B$  sont deux matrices de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  on définit leur *commutateur*

$$[A, B] = AB - BA.$$

1. Montrer que, si  $A, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  commutent (i.e.  $AC = CA$ ), alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$  les matrices  $e^{tA}$  et  $C$  commutent.

2. Pour  $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  définissons la fonction  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  par

$$\phi(t) = e^{tA} e^{tB} e^{-t(A+B)}.$$

Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi'(t)\phi(t)^{-1} = e^{tA}(A - e^{tB} A e^{-tB})e^{-tA}.$$

3. Supposons que  $A$  et  $B$  commutent avec  $[A, B]$ .

a) Montrer que

$$A - e^{tB} A e^{-tB} = t[A, B].$$

b) En déduire que

$$\phi'(t)\phi(t)^{-1} = t[A, B].$$

c) Montrer qu'alors

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]}.$$

### Corrigé de l'exercice 2.6.

1. Puisque  $A$  et  $C$  commutent,  $C$  commute avec toutes les puissances de  $A$  et, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout entier  $N$ ,  $C(\sum_{k=0}^N (tA)^k/k!) = (\sum_{k=0}^N (tA)^k/k!)C$ . En prenant la limite quand  $N \rightarrow \infty$  dans cette égalité, on obtient  $Ce^{tA} = e^{tA}C$ .

2. Calculons  $\phi'(t)$  en utilisant  $(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$  (vrai puisque  $A$  et  $e^{tA}$  commutent) :

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= e^{tA} A e^{tB} e^{-t(A+B)} + e^{tA} e^{tB} B e^{-t(A+B)} - e^{tA} e^{tB} (A+B) e^{-t(A+B)} \\ &= e^{tA} (A e^{tB} e^{-t(A+B)} - e^{tB} A e^{-t(A+B)}) \\ &= e^{tA} (A - e^{tB} A e^{-tB}) e^{-tA} \phi(t), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. a) Soit  $\psi(t) = A - e^{tB} A e^{-tB}$ . Alors

$$\psi'(t) = -e^{tB} B A e^{-tB} + e^{tB} A B e^{-tB} = e^{tB} [A, B] e^{-tB}.$$

Comme  $[A, B]$  et  $B$  commutent, d'après la question 1,  $[A, B]$  et  $e^{tB}$  commutent également et donc  $\psi'(t) = [A, B]$ . Comme de plus  $\psi(0) = 0$ , on obtient  $\psi(t) = \int_0^t \psi' = t[A, B]$ .

b) D'après la question 2,  $\phi'(t)\phi(t)^{-1} = e^{tA}\psi(t)e^{-tA} = te^{tA}[A, B]e^{-tA}$ . Comme  $[A, B]$  et  $e^{tA}$  commutent (question 1), on obtient  $\phi'(t)\phi(t)^{-1} = t[A, B]$ .



c) D'après la question précédente,  $\phi(t)$  est solution de l'équation différentielle

$$\phi'(t) = t[A, B]\phi(t),$$

qui s'intègre en  $\phi(t) = e^{\frac{t^2}{2}[A, B]}\phi(0)$ . Comme  $\phi(0) = I$ , on obtient, en prenant  $t = 1$ ,

$$e^A e^B e^{-(A+B)} = e^{\frac{1}{2}[A, B]} \quad \Rightarrow \quad e^A e^B = e^{(A+B)} e^{\frac{1}{2}[A, B]}.$$

Mais  $A + B$  et  $[A, B]$  commutent, donc  $e^{(A+B)} e^{\frac{1}{2}[A, B]} = e^{A+B+\frac{1}{2}[A, B]}$ , ce qui donne le résultat.

### Exercice 2.7 (Équation de Riccati).

Soient  $X, Y \in C^k(I, \mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$  solutions du système

$$\begin{cases} X' = AX + BY, \\ Y' = CX + DY, \end{cases} \quad A, B, C, D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Supposons  $Y(t)$  inversible sur un intervalle  $J \subset I$ . Trouver une équation différentielle (non linéaire) satisfaite par  $U = XY^{-1}$  sur  $J$ .

2. Comment trouver les solutions de l'équation non linéaire :

$$V' = E_1 + E_2V + VE_3V, \quad (2.9)$$

où  $E_1, E_2$  et  $E_3$  sont des matrices constantes?

### Corrigé de l'exercice 2.7.

1. La fonction  $U(t)$  est bien définie sur  $J$  puisque  $Y(t)$  est inversible, et y est de plus dérivable. Sa dérivée est

$$U'(t) = X'(t)Y^{-1}(t) + X(t)(Y^{-1})'(t).$$

Or  $(Y^{-1})' = -Y^{-1}Y'Y^{-1}$ . En effet,  $Y^{-1}(t) = \Phi(Y(t))$ , où  $\Phi$  est l'application différentiable  $Y \mapsto Y^{-1}$  définie sur  $GL_n(\mathbb{R})$ , dont la différentielle est  $D\Phi(Y) \cdot H = -Y^{-1}HY^{-1}$  (voir la section 1.1); on obtient alors par composition  $(Y^{-1})' = D\Phi(Y) \cdot Y'$ , donc le résultat (on peut aussi obtenir cette expression en dérivant par rapport à  $t$  l'égalité  $YY^{-1} = I$ ). Insérons cette expression dans celle de  $U'$  :

$$U' = X'Y^{-1} - XY^{-1}Y'Y^{-1} = AU + B - UCU - UD.$$

2. Identifions d'abord les coefficients avec ceux de l'équation trouvée à la question précédente :  $A = E_2$ ,  $B = E_1$ ,  $C = -E_3$  et  $D = 0$ . Ainsi, si  $(X(\cdot), Y(\cdot))$  est solution du système

$$\begin{cases} X' = E_2X + E_1Y, \\ Y' = -E_3X, \end{cases}$$

et si  $Y(t)$  est inversible sur un intervalle  $J$ , alors  $V = XY^{-1}$  est solution de l'équation (2.9). Pour une matrice  $V_0$  donnée, choisissons par exemple la solution  $X(\cdot), Y(\cdot)$  telle que

$$X(0) = V_0, \quad Y(0) = I.$$

Par continuité, la fonction  $Y(\cdot)$  ainsi obtenue sera inversible sur un voisinage  $J$  de 0 et  $V = XY^{-1}$  sera la solution de l'équation (2.9) sur  $J$  vérifiant  $V(0) = V_0$ .

## Équations différentielles linéaires

---

Nous avons traité au chapitre 2 les équations linéaires dans un cas particulier, le cas autonome. Nous abordons maintenant en toute généralité l'étude des équations différentielles linéaires, c'est-à-dire de la forme

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in J. \quad (3.1)$$

Précisons les notations. Les *données* sont :

- un intervalle  $J$  de  $\mathbb{R}$ ;
- une application  $A : J \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  de classe  $C^k$  ( $k$  est un entier positif ou  $k = \infty$ ); chaque valeur  $A(t)$  est donc une matrice ( $n \times n$ ) à coefficients dans le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Une *solution* de (3.1) est une application dérivable  $x : J \rightarrow \mathbb{K}^n$  telle que, pour tout  $t \in J$ , sa dérivée  $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  vérifie  $x'(t) = A(t)x(t)$ . Notons qu'une solution est automatiquement de classe  $C^{k+1}$ .

Nous traiterons aussi le cas un peu plus général des équations différentielles *affines*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in J, \quad (3.2)$$

la donnée  $b(\cdot)$  étant une application de  $J$  dans  $\mathbb{K}^n$  de classe  $C^k$ . Nous verrons que l'étude de ces équations se déduit de celle des équations linéaires.

*Remarque 3.1.* Il est fréquent dans la littérature que l'expression « équation linéaire » soit utilisée pour les équations affines, les équations (3.1) étant alors appelées équations linéaires *homogènes*.

### 3.1 Existence et unicité globales

Nous énonçons le résultat pour les équations affines, les équations linéaires correspondant au cas particulier où  $b(\cdot)$  est identiquement nul.

**Théorème 3.1 (existence et unicité globales).** Soient  $t_0 \in J$  et  $x_0 \in \mathbb{K}^n$ . Il existe une unique solution  $x(\cdot)$  de l'équation (3.2) satisfaisant la condition initiale

$$x(t_0) = x_0.$$

Insistons sur le fait que ce théorème garantit l'existence de  $x(\cdot)$  sur *tout* l'intervalle  $J$ . Ce phénomène est propre aux équations linéaires (on comparera avec le théorème 4.1 de Cauchy-Lipschitz concernant les équations non-linéaires).

La preuve de ce théorème repose sur la remarque suivante :  $x(\cdot)$  est solution de (3.2) avec  $x(t_0) = x_0$  si et seulement si  $x(\cdot)$  est continue et vérifie pour tout  $t \in J$ ,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + b(s)) ds, \quad (3.3)$$

autrement dit, si  $x(\cdot)$  est un point fixe de l'application

$$x(\cdot) \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{\cdot} (A(s)x(s) + b(s)) ds.$$

Ainsi le théorème 3.1 est un résultat de point fixe et nous utiliserons donc le théorème du point fixe de Picard (théorème A.1, donné dans l'annexe A) pour le montrer. Notons que nous avons déjà vu une preuve similaire dans l'exercice 1.5.

**\*Démonstration.** Supposons d'abord que  $J$  soit un intervalle compact de la forme  $J = [a, b]$  et introduisons  $\Phi$  l'application affine qui à toute fonction  $x(\cdot) \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$  associe la fonction

$$\Phi(x(\cdot)) = x_0 + \int_{t_0}^{\cdot} (A(s)x(s) + b(s)) ds,$$

qui est visiblement continue et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, il s'agit de montrer que  $\Phi$  a un unique point fixe. Nous allons pour cela vérifier qu'un *itéré* de  $\Phi$  est contractant et appliquer le théorème du point fixe de Picard à cet itéré. On vérifiera alors que les points fixes de  $\Phi$  sont ceux de cet itéré.

▷ Pour  $x(\cdot), y(\cdot) \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$  et  $t \in J$ , on a

$$\begin{aligned} \|(\Phi \circ x)(t) - (\Phi \circ y)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (A(s)(x(s) - y(s))) ds \right\| \\ &\leq \|A\|_{C^0} \int_{t_0}^t \|x - y\|(s) ds \leq |t - t_0| \|A\|_{C^0} \|x - y\|_{C^0}, \end{aligned}$$

où  $\|f\|_{C^0} = \max_{t \in J} \|f(t)\|$  désigne la norme  $C^0$ . On voit en particulier que

$$\|\Phi \circ x - \Phi \circ y\|_{C^0} \leq (b - a) \|A\|_{C^0} \|x - y\|_{C^0},$$

ce qui prouve que  $\Phi$  est continue de  $C^0(J, \mathbb{R}^n)$  dans lui-même.

▷ Par le même calcul, on a, en notant  $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$ ,

$$\begin{aligned} \|(\Phi^2 \circ x)(t) - (\Phi^2 \circ y)(t)\| &\leq \|A\|_{C^0} \int_{t_0}^t \|(\Phi \circ x - \Phi \circ y)(s)\| ds \\ &\leq \|A\|_{C^0} \|A\|_{C^0} \|x - y\|_{C^0} \int_{t_0}^t |s - t_0| ds \leq \|A\|_{C^0}^2 \frac{1}{2} |t - t_0|^2 \|x - y\|_{C^0}, \end{aligned}$$

et on montre par récurrence que

$$\|(\Phi^N \circ x)(t) - (\Phi^N \circ y)(t)\| \leq \|A\|_{C^0}^N \frac{|t - t_0|^N}{N!} \|x - y\|_{C^0},$$

c'est-à-dire,

$$\|\Phi^N \circ x - \Phi^N \circ y\|_{C^0} \leq \frac{((b-a)\|A\|_{C^0})^N}{N!} \|x - y\|_{C^0}.$$

▷ Choisissons  $N$  suffisamment grand pour que  $\frac{((b-a)\|A\|_{C^0})^N}{N!} \leq \frac{1}{2}$  (ce qui est possible puisque le membre de gauche de cette inégalité tend vers 0 avec  $N$ ). Rappelons que l'espace  $C^0(J, \mathbb{R}^n)$ , muni de la norme  $C^0$ , est un espace de Banach. L'application  $\Phi^N : C^0(J, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(J, \mathbb{R}^n)$  est alors  $\frac{1}{2}$ -contractante et, d'après le théorème du point fixe de Picard, admet un unique point fixe  $x(\cdot) \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$ .

Mais il n'est pas difficile de voir que les points fixes de  $\Phi$  sont les point fixes de  $\Phi^N$  : en effet si  $x(\cdot)$  est point fixe de  $\Phi$  on a évidemment

$$\Phi^N(x(\cdot)) = \Phi^{N-1} \circ \Phi(x(\cdot)) = \Phi^{N-1}(x(\cdot)),$$

et donc  $\Phi^N(x(\cdot)) = x(\cdot)$ ; réciproquement, si  $\Phi^N(x(\cdot)) = x(\cdot)$ , alors,

$$\Phi^N(\Phi(x(\cdot))) = \Phi^{N+1}(x(\cdot)) = \Phi(\Phi^N(x(\cdot))) = \Phi(x(\cdot)),$$

et donc  $\Phi(x(\cdot))$  et  $x(\cdot)$  sont points fixes de  $\Phi^N$  qui est contractante et admet de ce fait un unique point fixe : ils sont donc égaux. Ceci prouve le théorème pour  $J$  de la forme  $J = [a, b]$ .

▷ Si  $J$  n'est pas compact, il existe une suite d'intervalles croissants  $J_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , contenant  $t_0$  et tels que  $J = \bigcup_k J_k$ . Il suffit alors d'appliquer le résultat sur chaque intervalle  $J_k$ .  $\square$

### 3.2 La résolvente

Revenons à l'étude des équations linéaires dans  $\mathbb{K}^n$

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{3.1}$$

et notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des solutions de cette équation.

**Proposition 3.1.** *L'ensemble  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .*

**Démonstration.** Il est immédiat que  $\mathcal{E}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Fixons un instant  $t_0 \in J$  et introduisons l'application  $L_{t_0} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathcal{E}$  qui à  $x_0 \in \mathbb{K}^n$  associe la solution  $x(\cdot)$  de (3.1) telle que  $x(t_0) = x_0$ . C'est clairement une application linéaire et il résulte directement de l'existence et de l'unicité des solutions que  $L_{t_0}$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  sur  $\mathcal{E}$ , ce qui prouve le résultat.  $\square$

**Définition 3.1.** Soient  $t, s \in J$ . On appelle *résolvante* entre  $s$  et  $t$  de l'équation différentielle (3.1) l'application  $R_A(t, s) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  qui à  $x_0 \in \mathbb{K}^n$  associe  $x(t)$ , où  $x(\cdot)$  est la solution de (3.1) qui satisfait  $x(s) = x_0$ .

Il résulte des théorèmes d'existence et d'unicité que la résolvante est linéaire et bijective (avec les notations de la preuve précédente,  $R_A(t, s) = L_t \circ L_s^{-1}$ ). L'application  $R_A(t, s)$  peut donc s'identifier à une matrice *inversible* de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ . Elle permet d'exprimer toute solution  $x(\cdot)$  de l'équation (3.1) en fonction d'une condition initiale

$$x(t) = R_A(t, t_0)x(t_0).$$

*Exemple 3.1 (cas autonome).* Quand  $A(\cdot) \equiv A$  est constante, la résolvante est l'exponentielle de  $A : R_A(t, s) = e^{(t-s)A}$ .

*Exemple 3.2 (cas  $n = 1$ ).* Quand l'équation différentielle est une équation scalaire  $x'(t) = \alpha(t)x(t)$ , où  $x(\cdot)$  et  $\alpha(\cdot)$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , les solutions se calculent directement par intégration à partir de la valeur au temps  $s$  :

$$x(t) = \exp\left(\int_s^t \alpha(\tau)d\tau\right)x(s).$$

La résolvante est donc  $R_\alpha(t, s) = \exp\left(\int_s^t \alpha(\tau)d\tau\right)$ .

La résolvante possède également les propriétés suivantes.

**Proposition 3.2.**

1. Pour tout  $t_0 \in J$ ,  $R_A(\cdot, t_0)$  est la solution de l'équation différentielle matricielle

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, t_0) = A(t)R_A(t, t_0), \\ R_A(t_0, t_0) = I, \end{cases} \quad (3.4)$$

2. Pour tous  $t_0, t_1, t_2$  dans  $J$ ,

$$R_A(t_2, t_0) = R_A(t_2, t_1) R_A(t_1, t_0).$$

3. Si  $A(\cdot)$  est de classe  $C^k$ , l'application  $t \mapsto R_A(t, t_0)$  est de classe  $C^{k+1}$ .

**Démonstration.** Le premier point résulte du fait que, pour tout  $x_0 \in \mathbb{K}^n$ ,  $R_A(t, t_0)x_0$  est solution de l'équation (3.1) et satisfait donc

$$\frac{\partial}{\partial t} (R_A(t, t_0)x_0) = A(t)(R_A(t, t_0)x_0).$$

Le deuxième point résulte de la définition même de la résolvante. Quant à la dernière assertion, elle résulte de la première.  $\square$

*Remarque 3.2.*

- L'équation différentielle satisfaite par la résolvante a la même forme que l'équation (3.1) mais a lieu dans  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$  et non dans  $\mathbb{K}^n$ .
- Le point 2 (ou directement la définition) implique en particulier

$$R_A(t, s)^{-1} = R_A(s, t).$$

- Les colonnes  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  de la résolvante  $R_A(t, t_0)$  sont les valeurs à l'instant  $t$  des solutions valant  $e_1, \dots, e_n$  (les vecteurs de la base canonique) à  $t = t_0$ , puisque par définition  $x_j(t) = R_A(t, t_0)e_j$ . Les fonctions  $x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$  forment donc une base de l'ensemble  $\mathcal{E}$  des solutions. C'est ce que l'on appelle un *système fondamental de solutions*.

Réciproquement, à un système fondamental de solutions  $y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$  on peut associer les matrices  $V(s) \in GL_n(\mathbb{R})$ ,  $s \in J$ , dont les colonnes sont les vecteurs  $y_i(s)$ . On a alors  $V(t) = R_A(t, s)V(s)$ , c'est-à-dire,

$$R_A(t, s) = V(t)V(s)^{-1}. \quad (3.5)$$

Comme nous venons de le voir, pour résoudre une équation différentielle linéaire, il suffit de savoir calculer la résolvante (de même que pour les équations autonomes il suffit de savoir calculer l'exponentielle). Malheureusement, en dehors du cas autonome, **il est très rare de pouvoir donner une expression explicite de la résolvante**. Nous allons voir en revanche que l'on peut obtenir des informations *qualitatives* sur les solutions de l'équation grâce à l'étude de la résolvante.

### 3.3 Quelques propriétés de la résolvante

#### Déterminant de la résolvante

**Proposition 3.3.** *Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ . La fonction  $\Delta(t) = \det R_A(t, t_0)$  est la solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \Delta'(t) = \operatorname{tr}(A(t)) \Delta(t), \\ \Delta(t_0) = 1, \end{cases}$$

ce qui implique

$$\det R_A(t, t_0) = \exp \left( \int_{t_0}^t \operatorname{tr}(A(u)) du \right).$$

**Démonstration.** Rappelons (voir exercice 1.1) que la différentielle de l'application déterminant en  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  est  $D \det(A) \cdot H = (\det A) \operatorname{tr}(A^{-1}H)$ . On a donc

$$\begin{aligned} \Delta'(t) &= (\det R_A(t, t_0)) \operatorname{tr}(R_A^{-1}(t, t_0), R'_A(t, t_0)) \\ &= \Delta(t) \operatorname{tr}(A(t)). \end{aligned}$$

La conclusion de la proposition suit. □

*Remarque 3.3.* Rappelons que le *wronskien* d'une famille  $y_1(\cdot), \dots, y_n(\cdot)$  de solutions de  $x' = A(t)x$  est la fonction  $t \mapsto W(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$ . D'après la remarque 3.2, équation (3.5), le wronskien se déduit directement du déterminant de la résolvante,

$$W(t) = \det R_A(t, t_0)W(t_0).$$

Il en résulte que tout wronskien est solution de l'équation différentielle

$$W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))W(t),$$

et, inversement, que toute solution de cette équation est le wronskien d'une famille de solutions.

**Corollaire 3.1 (Liouville).** *Si pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A(t)$  est de trace nulle, alors le déterminant de  $R_A(t, s)$  est identiquement égal à 1.*

Il résulte de ce corollaire que, si  $A(t)$  est de trace nulle, l'équation différentielle (3.1) préserve les volumes. En effet, si  $\Gamma$  est un domaine de  $\mathbb{R}^n$ , notons  $\Gamma_t$  son transport de  $t_0$  à  $t$  par l'équation (3.1), c'est-à-dire,

$$\Gamma_t = \{x(t) : x(\cdot) \text{ solution de (3.1) t.q. } x(t_0) \in \Gamma\},$$

ou encore  $\Gamma_t = R_A(t, t_0)\Gamma$ . Alors, en utilisant la formule de changement de variable dans les intégrales multiples, on obtient

$$\operatorname{vol}(\Gamma_t) = |\det R_A(t, t_0)| \operatorname{vol}(\Gamma),$$

et donc  $\operatorname{vol}(\Gamma_t) = \operatorname{vol}(\Gamma)$  si  $\operatorname{tr} A(\cdot) \equiv 0$ .

La préservation du volume a une conséquence sur le comportement asymptotique des solutions : il est en effet impossible dans ce cas que toutes les solutions de (3.1) tendent vers 0 quand  $t \rightarrow \pm\infty$  (de même qu'il est impossible que  $\|x(t)\|$  tende vers l'infini pour toute solution  $x(\cdot)$ ).

Une classe particulièrement intéressante de matrices de trace nulle est l'ensemble des matrices antisymétriques, qui interviennent fréquemment dans les problèmes issus de la physique.

**Proposition 3.4.** *Si, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A(t)$  est une matrice réelle antisymétrique, la résolvante  $R_A(t, s)$  est une rotation pour tous  $t, s \in \mathbb{R}$ .*

Rappelons qu'une rotation est une matrice  $R \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  orthogonale (c'est-à-dire  $R^T R = I$ ) et de déterminant 1.



**Démonstration.** Une matrice antisymétrique étant de trace nulle, on a, d'après le corollaire précédent,  $\det R_A(t, s) \equiv 1$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (R_A(t, s)^T R_A(t, s)) &= \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, s)^T R_A(t, s) + R_A(t, s)^T \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, s) \\ &= R_A(t, s)^T A(t)^T R_A(t, s) + R_A(t, s)^T A(t) R_A(t, s) \\ &= R_A(t, s)^T (A(t)^T + A(t)) R_A(t, s) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $R_A(t, s)^T R_A(t, s)$  est indépendant de  $t$ . Comme  $R_A(s, s) = I$ , on a la conclusion.  $\square$

Une conséquence de ce résultat est que, si pour tout  $t$   $A(t)$  est une matrice réelle antisymétrique, l'équation différentielle (3.1) préserve la norme. En effet, si  $x(\cdot)$  est une solution de l'équation

$$\|x(t)\| = \|R_A(t, t_0)x(t_0)\| = \|x(t_0)\|,$$

puisque  $R_A(t, t_0)$  est une rotation. En particulier, toute solution est bornée. En revanche il est impossible qu'une solution tende vers 0 (sauf si  $x(\cdot) \equiv 0$  bien sûr).

Notons enfin que, contrairement au cas autonome, le comportement asymptotique des solutions (et donc de la résolvante) n'est pas déterminé par les valeurs propres de la matrice  $A(t)$ . Nous donnons ci-dessous deux exemples de matrices  $A(t)$  ayant des valeurs propres de partie réelle négative alors que l'équation  $x'(t) = A(t)x(t)$  admet des solutions qui ne tendent pas vers 0.

*Exemple 3.3.*

- La matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos^2 t & -1 - \frac{1}{2} \cos t \sin t \\ 1 - \frac{1}{2} \cos t \sin t & -\frac{1}{2} \sin^2 t \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres  $\frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{15})$ , qui sont toutes deux de partie réelle négative (et indépendantes de  $t$ ). Or il est immédiat que l'équation  $x'(t) = A(t)x(t)$  admet une solution périodique,

$$x(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

qui ne tend donc pas vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .

- La matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1 + \cos^2 t) & e^t(-1 + \frac{1}{4} \cos t \sin t) \\ e^{-t}(1 + \frac{1}{4} \cos t \sin t) & \frac{1}{4}(-3 + \sin^2 t) \end{pmatrix}$$

a deux valeurs propres de partie réelle négative (mais qui dépendent de  $t$ ), d'après la remarque (2.6), puisque :

$$\operatorname{tr} A(t) = -\frac{1}{4} < 0 \quad \text{et} \quad \det A(t) = \frac{13}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \cos^2 t\right) \geq \frac{10}{16} > 0.$$

Or l'équation  $x'(t) = A(t)x(t)$  admet pour solution

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{t/2} \cos t \\ e^{-t/2} \sin t \end{pmatrix},$$

dont la norme tend vers l'infini quand  $t \rightarrow +\infty$ .

### Dépendance par rapport aux perturbations et aux conditions initiales

Pour connaître la sensibilité d'une équation différentielle aux perturbations, il est important de savoir comment varient les solutions en fonction des données et des conditions initiales, c'est-à-dire, dans le cas des équations linéaires, comment varie la solution de

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.6)$$

quand  $x_0$  et  $A(\cdot)$  varient. La solution de ce système étant  $x(\cdot) = R_A(\cdot, t_0)x_0$ , il suffit de savoir de quelle façon la résolvante dépend de la fonction  $A(\cdot)$  (la dépendance par rapport à  $x_0$  étant alors linéaire, donc  $C^\infty$ ).

**Théorème 3.2.** *La résolvante  $R_A(\cdot, t_0)$  dépend de façon  $C^\infty$  de  $A(\cdot)$ , et la solution de (3.6) dépend de façon  $C^\infty$  de  $x_0$  et  $A(\cdot)$ .*

*Plus précisément,  $t_0 \in J$  et  $k \in \mathbb{N}$  étant donnés, les applications  $A(\cdot) \mapsto R_A(\cdot, t_0)$  de  $C^k(J, \mathbb{M}_n(\mathbb{R}))$  dans lui-même et*

$$\begin{aligned} \Psi : C^k(J, \mathbb{M}_n(\mathbb{R})) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow C^k(J, \mathbb{R}^n) \\ (A(\cdot), x_0) &\longmapsto \text{la solution } x(\cdot) \text{ de (3.6),} \end{aligned}$$

*sont des applications de classe  $C^\infty$ .*

Ce théorème est une conséquence directe du résultat ci-dessous, qui donne une expression de la résolvante sous forme d'une série normalement convergente.

### \*Expression de la résolvante

Il est parfois intéressant d'avoir une expression de la résolvante sous forme de série, analogue à celle de l'exponentielle de matrice.

**Proposition 3.5.** *La résolvante de (3.1) satisfait, pour tous  $a < b \in J$ ,*

$$\begin{aligned}
 R_A(b, a) &= I + \int_{a \leq s_1 \leq b} A(s_1) ds_1 + \cdots \\
 &\quad \cdots + \int_{a \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k \leq b} A(s_k) \cdots A(s_1) ds_1 \cdots ds_k + \cdots,
 \end{aligned}$$

la série précédente étant normalement convergente (en  $a$  et  $b$ ).

**Démonstration.** Constatons que, puisque  $\frac{\partial}{\partial t} R_A(t, a) = A(t)R_A(t, a)$ , on a

$$R_A(t, a) = I + \int_a^t A(s)R_A(s, a)ds.$$

Introduisons l'opérateur linéaire  $\mathcal{T}_A$  de  $C^0(J, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$  dans lui-même défini par

$$\mathcal{T}_A F(\cdot) = \int_a^{\cdot} A(s)F(s)ds.$$

On a donc  $R_A(\cdot, a) = I + \mathcal{T}_A R_A(\cdot, a)$  et, en itérant  $k$  fois cette relation,

$$R_A(\cdot, a) = I + \mathcal{T}_A I + \mathcal{T}_A^2 I + \cdots + \mathcal{T}_A^{n-1} I + \mathcal{T}_A^k R_A(\cdot, a).$$

▷ D'autre part, il est facile de voir que

$$(\mathcal{T}_A^k F)(t) = \int_{a \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k \leq t} A(s_k) \cdots A(s_1) F(s_1) ds_1 \cdots ds_k.$$

Par conséquent, en choisissant une norme multiplicative sur  $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ,

$$\begin{aligned}
 \|(\mathcal{T}_A^k F)(t)\| &= \left\| \int_{a \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k \leq t} A(s_k) \cdots A(s_1) F(s_1) ds_1 \cdots ds_k \right\| \\
 &\leq \int_{a \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k \leq t} \|A(s_k)\| \cdots \|A(s_1)\| \|F(s_1)\| ds_1 \cdots ds_k \\
 &\leq \|A(\cdot)\|_{C^0(J)}^k \|F(\cdot)\|_{C^0(J)} \times \\
 &\quad \times \text{mes}_k(\{(s_1, \dots, s_k) \in [a, t]^k, \quad a \leq s_1 \leq \cdots \leq s_k \leq t\}) \\
 &\leq \frac{\|A(\cdot)\|_{C^0(J)}^k |t - a|^k}{k!} \|F(\cdot)\|_{C^0(J)},
 \end{aligned}$$

puisque le pavé  $[a, t]^k$  est, à un ensemble de mesure  $k$ -dimensionnelle nulle près, la réunion disjointe des ensembles  $\{(s_1, \dots, s_k) \in [a, t]^k : s_{\sigma(1)} < \cdots < s_{\sigma(k)}\}$ , qui sont tous d'égale mesure,  $\sigma$  décrivant l'ensemble des  $k!$  permutations des indices  $1, \dots, k$ .

▷ Ceci prouve d'une part que  $\mathcal{T}_A^n R_A(\cdot, a)$  tend vers 0 pour la topologie  $C^0(J, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$  et d'autre part que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_A^k I$  converge normalement. Il est alors clair que cette dernière série est égale à  $R_A(\cdot, a)$ .  $\square$

On évitera de recourir à ces formules dans la pratique sauf peut-être dans un cas : si toutes les valeurs de  $A(\cdot)$  commutent entre elles, c'est-à-dire si  $A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$  pour tous  $t_1, t_2 \in J$ , la série précédente se réduit à une exponentielle :

$$R_A(b, a) = \exp\left(\int_a^b A(s) ds\right).$$

C'est en particulier le cas quand  $n = 1$ , voir l'exemple 3.2.

### 3.4 Équations affines

On s'intéresse maintenant aux équations différentielles affines

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \quad t \in J.$$

La connaissance de la résolvante  $R_A(t, t_0)$  associée à  $A(\cdot)$  (*i.e.* à l'équation linéaire  $x'(t) = A(t)x(t)$ ) permet de déterminer toutes les solutions du système affine, grâce à la formule de *la variation de la constante*.

**Théorème 3.3 (variation de la constante).** *Soient  $t_0 \in J$  et  $x_0 \in \mathbb{K}^n$ . La solution de l'équation  $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$  valant  $x_0$  en  $t_0$  est*

$$x(t) = R_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R_A(t, s)b(s) ds.$$

**Démonstration.** Soit  $x(\cdot)$  la solution valant  $x_0$  en  $t_0$ . Posons  $y(t) = R_A(t, t_0)^{-1}x(t)$  pour tout  $t \in J$ . Calculons la dérivée de  $y(\cdot)$  :

$$y'(t) = \frac{\partial}{\partial t}(R_A(t, t_0)^{-1})x(t) + R_A(t, t_0)^{-1}x'(t) = \frac{\partial}{\partial t}(R_A(t, t_0)^{-1}) + R_A(t, t_0)^{-1}(A(t)x(t) + b(t)).$$

En utilisant d'abord la différentielle de l'application  $M \mapsto M^{-1}$  (voir page 2) puis l'équation (3.4) vérifiée par  $R_A$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(R_A(t, t_0)^{-1}) &= -R_A(t, t_0)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial t} R_A(t, t_0) \right) R_A(t, t_0)^{-1} \\ &= -R_A(t, t_0)^{-1} A(t) R_A(t, t_0) R_A(t, t_0)^{-1}, \end{aligned}$$

et on obtient finalement

$$y'(t) = R_A(t, t_0)^{-1}b(t).$$

Par conséquent, en utilisant  $R_A(t, t_0)^{-1} = R_A(t_0, t)$ ,

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t R_A(t_0, s)b(s)ds,$$

et, puisque  $y(t_0) = R_A(t_0, t_0)^{-1}x(t_0) = x_0$ ,

$$x(t) = R_A(t, t_0)x_0 + R_A(t, t_0) \int_{t_0}^t R_A(t_0, s)b(s)ds,$$

ce qui est le résultat annoncé puisque  $R_A(t, t_0)R_A(t_0, s) = R_A(t, s)$ . □

Ce résultat montre que l'étude des équations affines, comme celle des équations linéaires, se ramène à l'étude de la résolvante. Nous obtenons par exemple directement la dépendance  $C^\infty$  par rapport aux conditions initiales et aux perturbations.

**Théorème 3.4.** *La solution de  $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$  satisfaisant  $x(t_0) = x_0$  dépend de façon  $C^\infty$  de  $x_0$ ,  $A(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$ .*

**\*Démonstration.** Précisément, il faut montrer que pour tout  $t_0 \in J$  et  $k \in \mathbb{N}$ , l'application

$$\Psi : C^k(J, \mathbb{M}_n(\mathbb{R})) \times C^k(J, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow C^k(J, \mathbb{R}^n),$$

qui à  $(A(\cdot), b(\cdot), x_0)$  associe la solution de  $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$  satisfaisant  $x(t_0) = x_0$ , est une application de classe  $C^\infty$ . Pour cela, il suffit de constater que  $\Psi$  est la composée de l'application

$$\begin{aligned} \Psi_1 : C^k(J, \mathbb{M}_n(\mathbb{R})) \times C^k(J, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow C^k(J, \mathbb{M}_n(\mathbb{R})) \times C^k(J, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n, \\ (A(\cdot), b(\cdot), x_0) &\longmapsto (R_A(\cdot, t_0), b(\cdot), x_0), \end{aligned}$$

dont on sait qu'elle est  $C^\infty$  d'après le théorème 3.2, et de l'application

$$\begin{aligned} \Psi_2 : C^k(J, \mathbb{M}_n(\mathbb{R})) \times C^k(J, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow C^k(J, \mathbb{R}^n), \\ (R_A(\cdot, t_0), b(\cdot), x_0) &\longmapsto R_A(\cdot, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{\cdot} R_A(\cdot, s)b(s)ds, \end{aligned}$$

dont on peut vérifier (exercice) qu'elle est  $C^\infty$ . □

### 3.5 Équations linéaires périodiques

Nous considérons dans cette section le cas particulier des *équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, c'est-à-dire de la forme

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

où  $A \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$  est  $T$ -périodique :  $\forall t \in \mathbb{R}, A(t + T) = A(t)$ . C'est une situation que l'on rencontre fréquemment dans les équations différentielles issues de la physique (voir par exemple l'exercice 3.4).

#### Propriétés de la résolvante

**Théorème 3.5.** *Soit  $R_A$  la résolvante du système (3.7) où  $A$  est  $T$ -périodique.*

(i) *Pour tous  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , on a*

$$R_A(t_2 + T, t_1 + T) = R_A(t_2, t_1).$$

(ii) *Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$R_A(t + T, t) = R_A(t, 0) R_A(T, 0) R_A(t, 0)^{-1}.$$

**Démonstration.** Pour  $t_1 \in \mathbb{R}$  fixé, posons  $S(t) = R_A(t + T, t_1 + T)$ . En dérivant, il vient

$$S'(t) = \frac{\partial}{\partial t} R_A(t + T, t_1 + T) = A(t + T)R_A(t + T, t_1 + T) = A(t)S(t),$$

puisque  $A$  est  $T$ -périodique. En outre  $S(t_1) = R_A(t_1 + T, t_1 + T) = I$ . D'après la proposition 3.2, on a  $S(t) = R_A(t, t_1)$ , ce qui est (i).

▷ Montrons (ii). On a l'égalité

$$R_A(t + T, t) = R_A(t + T, T) R_A(T, 0) R_A(0, t),$$

et comme, d'après (i),  $R_A(t + T, T) = R_A(t, 0)$ , on a

$$R_A(t + T, t) = R_A(t, 0) R_A(T, 0) R_A(0, t) = R_A(t, 0) R_A(T, 0) R_A(t, 0)^{-1}.$$

□

## Existence de solutions périodiques non triviales

Un système tel que (3.7) admet toujours la solution  $x \equiv 0$  comme solution  $T$ -périodique triviale (et même périodique de toute période), mais n'admet pas toujours de solution  $T$ -périodique non identiquement nulle, bien que  $A(\cdot)$  soit  $T$ -périodique (prendre  $A$  constante par exemple). L'étude de la matrice  $R_A(T, 0)$  permet de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de telles solutions.

**Théorème 3.6.** *Soit  $A(\cdot)$   $T$ -périodique. L'équation  $x'(t) = A(t)x(t)$  admet une solution  $T$ -périodique non triviale si et seulement si 1 est valeur propre de  $R_A(T, 0)$ . Si c'est le cas, et si  $v \in \mathbb{K}^n$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, alors*

$$x(t) = R_A(t, 0)v,$$

*est une solution  $T$ -périodique de (3.7).*

**Démonstration.** Soit  $x(\cdot)$  une solution  $T$ -périodique non triviale de (3.7) et soit  $t_0$  tel que  $x(t_0) \neq 0$ . On a alors

$$x(t_0) = x(t_0 + T) = R_A(t_0 + T, t_0)x(t_0),$$

ce qui signifie que  $x(t_0)$  est un vecteur propre de  $R_A(t_0 + T, t_0)$  associé à la valeur propre 1. Or, d'après le (ii) du théorème 3.5, les matrices  $R_A(t_0 + T, t_0)$  et  $R_A(T, 0)$  sont conjuguées. Elles ont donc en particulier les mêmes valeurs propres, ce qui implique que 1 est valeur propre de  $R_A(T, 0)$ .

▷ Réciproquement, si  $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  vérifie  $v = R_A(T, 0)v$ , alors

$$x(t) = R_A(t, 0)v = R_A(t, 0)R_A(T, 0)v,$$

et, d'après le (i) du théorème précédent,

$$x(t) = R_A(t + T, T)R_A(T, 0)v = R_A(t + T, 0)v = x(t + T).$$

□

## \*Le théorème de Floquet

Il existe de fortes analogies entre les équations linéaires autonomes et celles à coefficients périodiques. Le résultat suivant montre que les solutions d'une équation périodique s'obtiennent en appliquant un changement de base périodique aux solutions d'un système linéaire.

**Théorème 3.7 (de Floquet).** *Soit  $A(\cdot) \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$  une application  $T$ -périodique. Il existe alors :*

- une matrice  $A_0 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ ,
- une fonction  $P \in C^k(\mathbb{R}, GL_n(\mathbb{K}))$ , avec  $P(0) = I$ , qui est  $T$ -périodique si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et  $2T$ -périodique si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,

telles que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$R_A(t, 0) = P(t)e^{tA_0}.$$

En outre, pour toute solution  $x(\cdot)$  de  $x'(t) = A(t)x(t)$ , la fonction  $y(\cdot) = P(\cdot)^{-1}x(\cdot)$  est solution de l'équation linéaire autonome  $y'(t) = A_0y(t)$ .

**Démonstration.** La preuve de ce résultat repose sur les deux faits suivants : d'une part, toute matrice inversible à coefficients complexes est l'exponentielle d'une matrice à coefficients complexes et, d'autre part, le carré de toute matrice réelle inversible est l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels. La preuve du premier fait repose sur la décomposition de Jordan (théorème 2.4). En effet il résulte de cette décomposition qu'il suffit de savoir écrire un bloc de Jordan  $J = \lambda I + N$ , où  $\lambda \neq 0$ , comme  $e^B$ . Or en choisissant  $\mu \in \mathbb{C}$  tel que  $e^\mu = \lambda$ , il suffit de résoudre

$$I + \frac{1}{\lambda}N = e^{B - \mu I},$$

et cette dernière équation admet comme solution  $B - \mu I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N^k}{k\lambda^k}$  (c'est la série du logarithme, et elle converge car  $N$  est nilpotente). La preuve du deuxième fait (sur le carré d'une matrice réelle), basée sur la décomposition de Jordan réelle, est plus délicate. On en trouvera une preuve dans [9, Prop. 3.13].

▷ Revenons à la preuve du théorème et supposons d'abord  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . D'après ce qui précède, on peut trouver une matrice  $A_0$  telle que :

$$R_A(T, 0) = e^{TA_0}. \tag{3.8}$$

Vérifions alors que la fonction  $P$  définie par  $P(t) = R_A(t, 0)e^{-tA_0}$  est  $T$ -périodique. Calculons :

$$\begin{aligned} P(t + T) &= R_A(t + T, 0)e^{-(t+T)A_0} \\ &= R_A(t + T, T)R_A(T, 0)e^{-TA_0}e^{-tA_0} \\ &= R_A(t, 0)e^{-tA_0} = P(t), \end{aligned}$$

où on a utilisé (3.8) et le (i) du théorème 3.5 pour obtenir l'avant dernière égalité :  $P$  est donc bien  $T$ -périodique.

▷ Dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on choisira  $A_0 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$R_A(2T, 0) = R_A(T, 0)^2 = e^{2TA_0},$$

et on poursuivra la preuve comme dans le cas complexe. □

Bien évidemment il est difficile de déterminer  $A_0$  et  $P(\cdot)$ . Néanmoins, leur existence peut fournir de précieux renseignements, en particulier la forme générale des solutions.

**Corollaire 3.2.** *En reprenant les notations précédentes, toute solution de  $x'(t) = A(t)x(t)$  admet une écriture de la forme*

$$x(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} t^k e^{t\lambda_i} v_{i,k}(t),$$

où les  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , sont les racines du polynôme caractéristique de  $A_0$  et les  $v_{i,k}(\cdot)$  sont des fonctions de classe  $C^k$  à valeurs dans  $\mathbb{K}^n$  qui sont  $T$  ou  $2T$ -périodiques suivant que  $\mathbb{K}$  égale  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$  (les entiers  $m_i$  sont définis par la forme de Jordan de  $A_0$ , comme dans le théorème 2.6).

### 3.6 Exercices corrigés

**Exercice 3.1.** Soit  $f$  une fonction continue réelle de la variable réelle. Considérons l'équation scalaire

$$x'' + x = f(t). \quad (3.9)$$

1. Écrire (3.9) sous forme d'une équation différentielle affine du premier ordre.
2. Calculer la résolvante du système linéaire associé.
3. Exprimer  $x(t)$  et  $x'(t)$  en fonction de leurs valeurs en 0 et de  $f(t)$ .
4. On suppose que  $f(t)$  est  $2\pi$ -périodique. Montrer que  $x(t)$  solution de (3.9) est  $2\pi$ -périodique si et seulement si

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin(s) f(s) ds = 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos(s) f(s) ds = 0. \end{cases}$$

#### Corrigé de l'exercice 3.1.

1. En posant  $X = (x, x')$ , l'équation s'écrit

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

2. La matrice  $A$  du système linéaire étant indépendante de  $t$ , la résolvante est égale à l'exponentielle

$$R(t, s) = e^{(t-s)A} = \cos(t-s)I + \sin(t-s)A$$

(voir le calcul de cette exponentielle page 36 ou exercice 2.2).

3. D'après la formule de variation de la constante, on a

$$X(t) = e^{tA} X(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)x(0) + \sin(t)x'(0) + \int_0^t \sin(t-s)f(s)ds, \\ x'(t) = -\sin(t)x(0) + \cos(t)x'(0) + \int_0^t \cos(t-s)f(s)ds. \end{cases}$$



4. La fonction  $x(\cdot)$  est  $2\pi$ -périodique si et seulement si  $X(\cdot)$  l'est. Or, puisque  $X(\cdot)$  est solution d'une équation à coefficients  $2\pi$ -périodiques,  $X(\cdot)$  est  $2\pi$ -périodique si et seulement si  $X(0) = X(2\pi)$  (en effet, dans ce cas, les fonctions  $X(t)$  et  $X(t+2\pi)$  sont solutions de la même équation différentielle avec les mêmes conditions initiales, elles sont donc égales). Il suffit donc de calculer  $X(2\pi) - X(0)$  pour obtenir la conclusion :

$$\begin{cases} x(2\pi) - x(0) = \int_0^{2\pi} \sin(2\pi - s)f(s)ds = -\int_0^{2\pi} \sin(s)f(s)ds, \\ x'(2\pi) - x'(0) = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi - s)f(s)ds = \int_0^{2\pi} \cos(s)f(s)ds. \end{cases}$$

**Exercice 3.2.** Soit  $A : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  une application continue. On considère l'équation différentielle linéaire

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in ]0, +\infty[,$$

et on note  $R(t, t_0)$  sa résolvante.

1. Montrer que  $S(t, t_0) = R(t_0, t)^T$  est la résolvante de l'équation différentielle

$$z'(t) = -A(t)^T z(t).$$

2. Dans cette équation on choisit

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2t + \frac{1}{t} & 0 & \frac{1}{t} - t \\ t - \frac{1}{t} & 3t & t - \frac{1}{t} \\ \frac{2}{t} - 2t & 0 & \frac{2}{t} + t \end{bmatrix}.$$

Montrer que  $A(t)$  possède une base de vecteur propres indépendante de  $t$ . En déduire la résolvante  $R(t, t_0)$  de l'équation (3.2).

3. Résoudre à l'aide des questions précédentes le système

$$\begin{cases} x'_1 = -\left(2t + \frac{1}{t}\right)x_1 + \left(\frac{1}{t} - t\right)x_2 + 2\left(t - \frac{1}{t}\right)x_3, \\ x'_2 = -3tx_2, \\ x'_3 = \left(t - \frac{1}{t}\right)x_1 + \left(\frac{1}{t} - t\right)x_2 - \left(\frac{2}{t} + t\right)x_3. \end{cases}$$

**Corrigé de l'exercice 3.2.**

1. Essayons d'abord de donner une équation différentielle satisfaite par  $R(t_0, t) = R(t, t_0)^{-1}$ . Il suffit de calculer  $\frac{\partial}{\partial t}R(t_0, t)$ . Écrivons  $R(t_0, t)$  comme  $f \circ R(t, t_0)$ , où  $f : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ ,  $f(M) = M^{-1}$ . On sait, d'après la section 1.1, que  $Df(M) \cdot H = -M^{-1}HM^{-1}$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}R(t_0, t) &= Df(R(t, t_0)) \cdot \frac{\partial}{\partial t}R(t, t_0) \\ &= -R(t, t_0)^{-1}A(t)R(t, t_0)R(t, t_0)^{-1} \\ &= -R(t_0, t)A(t). \end{aligned}$$

La transposition étant une opération linéaire, on a  $\frac{\partial}{\partial t}R(t_0, t)^T = (\frac{\partial}{\partial t}R(t_0, t))^T$ . On obtient finalement

$$\frac{\partial}{\partial t}R(t_0, t)^T = -A(t)^T R(t_0, t)^T.$$

Puisque en outre  $R(t_0, t_0)^T = I$ , la matrice  $R(t_0, t)^T$  est la résolvante de  $z' = -A(t)^T z$ .

2. Le polynôme caractéristique de  $A(t)$  est

$$\begin{aligned} P_{A(t)}(\lambda) &= (\lambda - 2t - \frac{1}{t})(\lambda - 3t)(\lambda - \frac{2}{t} - t) + (\frac{1}{t} - t)3t(\frac{2}{t} - 2t) \\ &= (\lambda - 3t)^2(\lambda - \frac{3}{t}), \end{aligned}$$

les valeurs propres de  $A(t)$  sont donc  $\frac{3}{t}$  et  $3t$ , qui est valeur propre double.

Le sous-espace propre associé à  $3t$  est  $\Pi_{3t} = \ker(A - 3tI)$ . Donc  $x \in \Pi_{3t}$  si et seulement si

$$\begin{cases} (-t + \frac{1}{t})x_1 + (\frac{1}{t} - t)x_3 = 0, \\ (t - \frac{1}{t})x_1 + (t - \frac{1}{t})x_3 = 0, \\ (-2t + \frac{2}{t})x_1 + (-2t + \frac{2}{t})x_3 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire,  $\Pi_{3t} = \text{Vect}\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ . Le sous-espace propre associé à  $\frac{3}{t}$  est  $\Pi_{\frac{3}{t}} = \ker(A - \frac{3}{t}I)$ . Donc  $x \in \Pi_{\frac{3}{t}}$  si et seulement si

$$\begin{cases} (2t - \frac{2}{t})x_1 + (\frac{1}{t} - t)x_3 = 0, \\ (t - \frac{1}{t})x_1 + (3t - \frac{3}{t})x_2 + (t - \frac{1}{t})x_3 = 0, \\ (-2t + \frac{2}{t})x_1 + (t - \frac{1}{t})x_3 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire,  $\Pi_{\frac{3}{t}} = \text{Vect}\{(1, -1, 2)\}$ .

La matrice  $A(t)$  est donc diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ . Plus précisément, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D(t) = \begin{pmatrix} 3t & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{t} \end{pmatrix},$$

on a  $A(t) = PD(t)P^{-1}$ .

Ce qui est important ici (et exceptionnel!) est que la matrice de passage  $P$  ne dépend pas de  $t$ . Ainsi, si  $x(t)$  est une solution de  $x' = A(t)x$ , la fonction  $y(t) = P^{-1}x(t)$  satisfait  $y'(t) = D(t)y(t)$ , ou encore

$$\begin{cases} y'_1 = 3ty_1, \\ y'_2 = 3ty_2, \\ y'_3 = \frac{3}{t}y_3, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = y_1(t_0)e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)}, \\ y_2(t) = y_2(t_0)e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)}, \\ y_3(t) = y_3(t_0)(\frac{t}{t_0})^3. \end{cases}$$

En résumé, on sait d'une part que  $x(t) = R(t, t_0)x(t_0)$  et d'autre part que  $x(t) = Py(t)$  (et donc  $y(t_0) = P^{-1}x(t_0)$ ), ce qui donne finalement

$$R(t, t_0) = P \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{2}(t^2-t_0^2)} & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{t}{t_0})^3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Il faut insister sur le caractère quasi-miraculeux du cas que l'on traite ici : non seulement  $A(t)$  est diagonalisable pour tout  $t$ , mais en plus elle est diagonalisable dans la même base pour tout  $t$ . C'est pour cette raison que l'on est capable de calculer la résolvante.

**3.** C'est une application directe des questions précédentes. En effet l'équation s'écrit  $x'(t) = B(t)x(t)$ , où  $B(t) = -A(t)^T$  ( $A(t)$  étant la matrice de la question 2). La solution générale s'obtient à partir de la résolvante  $R(t, t_0)$  de la question 2 par  $x(t) = R(t_0, t)^T x(t_0)$ , c'est-à-dire

$$x(t) = P^{-T} \begin{pmatrix} e^{\frac{3}{2}(t_0^2-t^2)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{3}{2}(t_0^2-t^2)} & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{t_0}{t})^3 \end{pmatrix} P^T x(t_0).$$

### Exercice 3.3.

**1.** Montrer que, si  $u, v$  sont deux fonctions continues de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que, pour tout  $t \geq t_0$ ,

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds, \quad \text{où } C \geq 0 \text{ est une constante,}$$

alors

$$u(t) \leq C \exp \left( \int_{t_0}^t v(s)ds \right).$$

On considère maintenant l'équation linéaire sur  $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = (A + B(t))x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

où  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  est une application  $C^1$ .

**2.** Montrer que toute solution  $x(\cdot)$  de (3.10) vérifie

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}B(s)x(s)ds.$$

3. Supposons que toutes les solutions de  $x'(t) = Ax(t)$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^+$  et que

$$\int_0^{\infty} \|B(s)\| ds < \infty.$$

Montrer que toute solution de (3.10) est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

4. Supposons que toutes les solutions de  $x'(t) = Ax(t)$  tendent vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  et que  $B$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $\|B(t)\| \leq K$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Montrer que, si  $K$  est suffisamment petit, toutes les solutions de (3.10) tendent vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .

### Corrigé de l'exercice 3.3.

1. Ce résultat est le lemme de Gronwall, (lemme 4.1), voir sa preuve dans la section 4.2.

2. Il suffit d'appliquer la formule de la variation de la constante (théorème 3.3), en considérant  $x(t)$  comme solution de l'équation affine  $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ , où  $b(t) = B(t)x(t)$ .

3. Puisque toutes les solutions de  $x' = Ax$  sont bornées, il existe une constante  $K > 0$  telle que  $\|e^{tA}\| \leq K$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ . En utilisant la question précédente, on obtient donc

$$\|x(t)\| \leq K\|x(0)\| + K \int_0^t \|B(s)\| \|x(s)\| ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall (question 1) à  $u(t) = \|x(t)\|$  et  $v(t) = K\|B(t)\|$ , il vient, pour  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\|x(t)\| \leq K\|x(0)\| \exp\left(K \int_0^t \|B(s)\| ds\right) \leq K\|x(0)\| \exp\left(K \int_0^{\infty} \|B(s)\| ds\right),$$

c'est-à-dire que  $x(t)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

4. Comme à la question précédente, une solution de  $x'(t) = (A+B(t))x(t)$  satisfait

$$\|x(t)\| \leq \|e^{tA}\| \|x(0)\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\| \|B(s)\| \|x(s)\| ds.$$

D'après l'hypothèse, toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle  $< 0$ . Soit  $\alpha > 0$  tel que  $\alpha < \min\{\Re(\lambda) : \lambda \text{ val. propre de } A\}$ . D'après le théorème 2.9, il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que

$$\|e^{\tau A}\| \leq C_1 e^{-\alpha\tau} \quad \text{pour tout } \tau \geq 0.$$

Ceci implique

$$\|x(t)\| \leq C_1 e^{-\alpha t} \|x(0)\| + \int_0^t C_1 e^{-\alpha(t-s)} \|B(s)\| \|x(s)\| ds,$$

c'est-à-dire,

$$e^{\alpha t} \|x(t)\| \leq C_1 \|x(0)\| + \int_0^t C_1 e^{\alpha s} \|B(s)\| \|x(s)\| ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall à  $u(t) = e^{\alpha t} \|x(t)\|$  et  $v(t) = C_1 \|B(t)\|$ , il vient, pour  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$e^{\alpha t} \|x(t)\| \leq C_1 \|x(0)\| \exp\left(C_1 \int_0^t \|B(s)\| ds\right),$$

et donc, en utilisant l'hypothèse sur  $B$ ,

$$\|x(t)\| \leq C_1 \|x(0)\| e^{KC_1 t - \alpha t}.$$

Ainsi, pour  $K < \alpha/C_1$ , toute solution tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ .

### Exercice 3.4 (Structure en bande des solides).

**Le modèle physique.** On considère un solide comme un réseau d'atomes disposés selon un motif périodique infini. Certains de ces atomes sont ionisés, c'est-à-dire qu'ils ont perdu un ou plusieurs de leurs électrons pour diverses raisons physiques (l'agitation thermique par exemple). Les électrons ainsi libérés de leurs atomes mais prisonniers du solide se retrouvent soumis à un potentiel dont la période est celle du réseau cristallin, notée  $T$ .

Nous supposons ici le solide isotrope, ce qui permet d'étudier séparément chaque direction de l'espace. Pour chacune de ces directions, la fonction d'onde  $\psi_E$  d'un électron d'énergie  $E$  est alors une solution de l'équation Schrödinger stationnaire, qui s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_E}{dx^2}(x) + V(x) \psi_E(x) = E \psi_E(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où le potentiel  $V(x)$  est  $T$ -périodique et  $\psi_E$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Il s'agit donc d'une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques, qui peut s'écrire, en renormalisant  $x$ , sous la forme (3.11) ci-dessous. Rappelons que le carré de la fonction d'onde s'interprète comme une densité de probabilité de présence, ce qui implique qu'une fonction d'onde est dans  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , donc a fortiori bornée sur  $\mathbb{R}$  (puisque continue en tant que solution de l'équation). Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe des bandes de valeurs de l'énergie  $E$  pour lesquelles l'équation de Schrödinger ci-dessus n'admet pas de solutions bornées, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir d'électrons dans ces états d'énergie.

Soient  $V$  une fonction  $T$ -périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $E$  est un paramètre réel. On considère l'équation différentielle scalaire :

$$-\varphi''(t) + V(t)\varphi(t) = E\varphi(t). \quad (3.11)$$

1. Écrire l'équation (3.11) comme une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont la résolvante sera notée  $R_E(t, s)$ .
2. Montrer que, pour tous  $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\det R_E(t, s) = 1$ .
3. Montrer que  $R_E(t + T, s + T) = R_E(t, s)$ .
4. Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$R_E(t, 0) = R_E(t - nT, 0)R_E(T, 0)^n.$$

5. Montrer qu'il existe une solution bornée et non nulle  $X(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , si et seulement si il existe  $v \in \mathbb{R}^2$  non nul tel que la suite  $R_E(T, 0)^n v$  est bornée quand  $n \rightarrow \pm\infty$ .
6. En déduire que l'équation (3.11) admet une solution bornée non triviale si et seulement si  $|\operatorname{tr} R_E(T, 0)| \leq 2$ .
7. Montrer que  $\operatorname{tr} R_E(T, 0)$  tend vers  $+\infty$  quand  $E$  tend vers  $-\infty$ .
8. Que peut-on dire de l'ensemble des valeurs de  $E$  pour lesquelles (3.11) admet des solutions bornées non triviales? On utilisera le fait que la fonction  $E \mapsto \operatorname{tr} R_E(T, 0)$  est  $\mathbb{R}$ -analytique (c'est une conséquence de la proposition 3.5), et donc ne prend qu'un nombre fini de fois une valeur sur un intervalle borné.

### Corrigé de l'exercice 3.4.

1. En posant  $X = (\varphi, \varphi')$ , l'équation s'écrit

$$X'(t) = A_E(t)X(t) \quad \text{où} \quad A_E(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V(t) - E & 0 \end{pmatrix}.$$

2. C'est une simple conséquence du corollaire 3.1 puisque la trace de  $A_E(t)$  est nulle.
3. C'est une application directe du théorème 3.5, puisque  $A_E(\cdot)$  est  $T$ -périodique.
4. D'après la question précédente et la proposition 3.2, propriété 2,

$$R_E(t, 0) = R_E(t, T)R_E(T, 0) = R_E(t - T, 0)R_E(T, 0).$$

En appliquant le même calcul à  $R_E(t - T, 0)$  puis en itérant, on obtient bien  $R_E(t, 0) = R_E(t - nT, 0)R_E(T, 0)^n$  pour tout  $n$ .

**5.** Supposons d'abord qu'il existe une solution bornée non nulle  $X(\cdot)$  et posons  $v = X(0) \neq 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a alors, d'après la question précédente,

$$R_E(T, 0)^n v = R_E(nT, 0)v = X(nT),$$

qui est donc une suite bornée.

Réciproquement, supposons qu'il existe  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v \neq 0$ , tel que la suite  $R_E(T, 0)^n v$  est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $\|R_E(T, 0)^n v\| \leq C$ . Considérons la fonction  $t \mapsto X(t) = R_E(t, 0)v$  qui est une solution non nulle de l'équation. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , appliquons la formule de la question précédente avec  $n = \lceil \frac{t}{T} \rceil \in \mathbb{Z}$  (la partie entière de  $t/T$ ) :

$$X(t) = R_E(t - nT, 0)R_E(T, 0)^n v.$$

Or  $t - nT \in [0, T]$ . Cet intervalle étant compact et  $s \mapsto R_E(s, 0)$  continue,  $M = \max_{s \in [0, T]} (\|R_E(s, 0)\|)$  est fini et on a :

$$\|X(t)\| \leq \|R_E(t - nT, 0)\| \|R_E(T, 0)^n v\| \leq MC,$$

ce qui implique que  $X(\cdot)$  est bornée.

**6.** Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $R_E(T, 0)$ . On sait déjà que  $\lambda_1 \lambda_2 = \det R_E(T, 0) = 1$ . On va montrer qu'il y a une solution bornée non triviale si et seulement si  $|\operatorname{tr} R_E(T, 0)| = |\Re(\lambda_1) + \Re(\lambda_2)| \leq 2$ . On considère pour cela tous les cas possibles.

(i)  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des réels distincts :  $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$  et  $\lambda_1 \neq \pm 1$  (donc  $|\operatorname{tr} R_E(T, 0)| > 2$ ). La matrice  $R_E(T, 0)$  est alors diagonalisable, c'est-à-dire

$$R_E(T, 0) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad R_E(T, 0)^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Dans ce cas, pour tout  $v \neq 0$ ,  $R_E(T, 0)^n v \rightarrow \infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$  ou  $-\infty$ . Il n'y a donc pas de solutions bornées sur  $\mathbb{R}$ .

(ii)  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$  (donc  $|\operatorname{tr} R_E(T, 0)| = 2$ ). Considérons un vecteur propre  $v_0$ . Il vérifie  $R_E(T, 0)^n v_0 = (\lambda_1)^n v_0 = \pm v_0$ , ce qui est borné.

(iii)  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes conjugués et différents,  $\lambda_1 = e^{i\theta}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ , avec  $\theta \neq 0[\pi]$  (donc  $|\operatorname{tr} R_E(T, 0)| < 2$ ). La matrice  $R_E(T, 0)$  est alors semblable à une rotation

$$R_E(T, 0) = Q \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad R_E(T, 0)^n = Q \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Puisque  $R_E(T, 0)^n$  est borné, pour tout  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $R_E(T, 0)^n v$  est borné.

**7.** Nous allons utiliser l'expression de la résolvante sous forme de série normalement convergente. D'après la proposition 3.5, on a :

$$R_E(T, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{0 \leq s_k \leq \dots \leq s_1 \leq T} A(s_1) \cdots A(s_k) ds_k \cdots ds_1,$$

et donc

$$\text{tr} R_E(T, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{0 \leq s_k \leq \dots \leq s_1 \leq T} \text{tr} (A(s_1) \cdots A(s_k)) ds_k \cdots ds_1. \quad (3.12)$$

Posons  $\alpha_E(t) = V(t) - E$ . On montre aisément par récurrence les formules suivantes : pour tout entier  $p$ ,

$$A(s_1) \cdots A(s_{2p}) = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^p \alpha_E(s_{2i}) & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^p \alpha_E(s_{2i-1}) \end{pmatrix},$$

$$A(s_1) \cdots A(s_{2p+1}) = \begin{pmatrix} 0 & \prod_{i=1}^p \alpha_E(s_{2i}) \\ \prod_{i=1}^{p+1} \alpha_E(s_{2i-1}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, seuls les termes pairs interviennent dans la série (3.12) :

$$\text{tr} R_E(T, 0) = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{0 \leq s_{2p} \leq \dots \leq s_1 \leq T} \left( \prod_{i=1}^p \alpha_E(s_{2i}) + \prod_{i=1}^p \alpha_E(s_{2i-1}) \right) ds_{2p} \cdots ds_1.$$

Soit  $V_{\min} = \min_{[0, T]} V(t)$ . Quand  $E \rightarrow -\infty$ , on a, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $\alpha_E(t) \geq V_{\min} - E > 0$ . Le terme général de la série ci-dessus peut donc être minoré par

$$\int_{0 \leq s_{2p} \leq \dots \leq s_1 \leq T} 2(V_{\min} - E)^p ds_{2p} \cdots ds_1 = 2(V_{\min} - E)^p \frac{T^{2p}}{(2p)!}.$$

Ainsi  $\text{tr} R_E(T, 0) \geq 2 \cosh(T\sqrt{V_{\min} - E})$  qui tend vers  $+\infty$  quand  $E \rightarrow -\infty$ .

**8.** D'après la question précédente, il existe une valeur  $E_{\min}$  telle que  $\text{tr} R_E(T, 0)$  est supérieure à 2 pour tout  $E < E_{\min}$ . D'autre part, l'analyticité de la fonction  $E \mapsto \text{tr} R_E(T, 0)$  implique que cette fonction prend les valeurs  $\pm 2$  en des points isolés. Ainsi l'ensemble des  $E$  pour lesquelles (3.11) n'admet pas de solutions bornées (les énergies "interdites") est constitué de l'intervalle  $]-\infty, E_{\min}[$ , ainsi que d'une famille d'intervalles ouverts disjoints. C'est ce qui permet d'expliquer la *structure en bandes* des solides.



---

## Théorie générale des équations différentielles

Dans ce chapitre, nous présentons la théorie générale des équations différentielles *autonomes*, qui sont de la forme

$$x'(t) = f(x(t)).$$

Dans cette formulation, les *données* sont :

- un ensemble ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ;
- une application continue  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  (les résultats que nous allons présenter restent valables quand on remplace  $\mathbb{R}^n$  par n'importe quel espace vectoriel de dimension finie, par exemple  $\mathbb{C}^n$  ou  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ).

Une telle application  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelée un *champ de vecteurs* : à tout point  $x$  dans  $\Omega$ , elle associe un vecteur  $f(x)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Une *solution* de l'équation différentielle est une fonction dérivable  $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que

- $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ;
- $x(\cdot)$  prend ses valeurs dans  $\Omega$ , *i.e.*  $x(I) \subset \Omega$ ;
- pour tout  $t \in I$ ,  $x'(t) = f(x(t))$ .

Une solution est donc en fait un couple  $(x(\cdot), I)$  : l'intervalle de définition  $I$  fait partie des inconnues. Nous verrons comment caractériser cet intervalle dans la section 4.2.

Notons enfin que, comme l'application  $f$  est supposée continue, toute solution  $x(\cdot)$  de l'équation différentielle est automatiquement de classe  $C^1$ .

*Remarque 4.1.* Il peut sembler réducteur de se restreindre aux équations différentielles autonomes, alors que le cadre le plus général est celui des équations de la forme

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J \subset \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

qui dépendent explicitement du temps, et qui sont dites *non-autonomes*. Ce n'est en fait pas vraiment une restriction : toute équation non-autonome dans  $\mathbb{R}^n$  peut être vue comme une équation autonome dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En effet, définissons un champ de vecteur  $F : J \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  par  $F(t, x) = (1, f(t, x))$ . Il est alors clair que l'équation non-autonome (4.1) est équivalente à l'équation autonome

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, x) \end{pmatrix} = F(t, x(t)).$$

L'inconvénient de cette approche est que le temps  $t$  est considéré avec le même statut que l'état  $x$ , on suppose donc pour  $f$  la même régularité par rapport à  $t$  que par rapport à  $x$ ; or ce n'est généralement pas nécessaire (voir remarque 4.2 plus loin).

## 4.1 Existence et unicité

Nous avons vu au chapitre 3 qu'une équation différentielle linéaire admet toujours une unique solution pour une condition initiale donnée. Par ailleurs cette solution est définie globalement, c'est-à-dire qu'elle est définie tant que l'équation elle-même est définie. Dans le cas non linéaire, l'unicité sera (sous certaines hypothèses) encore de nature globale mais il n'en sera pas de même de l'existence, qui est locale.

**Théorème 4.1 (de Cauchy-Lipschitz).** *Supposons  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ . Alors, pour tout point  $x_0 \in \Omega$  et tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , il existe  $\delta > 0$  tel que le système*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (4.2)$$

*possède une unique solution définie sur  $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ .*

On appelle *problème de Cauchy* le système (4.2), formé d'une équation différentielle et d'une condition initiale donnée.

**\*Démonstration.** La démonstration de ce théorème repose sur le théorème du point fixe de Picard. Fixons un réel  $\alpha > 0$  tel que la boule fermée  $\overline{B}(x_0, \alpha)$  soit contenue dans  $\Omega$ . Puisque  $f$  est  $C^1$ , il existe des constantes  $M$  et  $K > 0$  telles que, sur  $\overline{B}(x_0, \alpha)$ ,  $f$  est bornée en norme par  $M$  et est  $K$ -lipschitzienne (grâce à la proposition 1.2). Posons en outre

$$\delta = \min \left( \frac{\alpha}{M}, \frac{1}{2K} \right).$$

▷ Définissons  $\mathcal{E}$  comme étant l'ensemble des fonctions  $x(\cdot)$  continues sur  $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$  à valeurs dans  $\overline{B}(x_0, \alpha)$  et telles que  $x(t_0) = x_0$ . Muni de la norme  $\|\cdot\|_{C^0}$ , c'est un espace complet. L'application :

$$\Phi(x(\cdot)) = x_0 + \int_{t_0}^{\cdot} f(x(s)) ds,$$

est une application de  $\mathcal{E}$  dans lui même : en effet, pour  $|t - t_0| \leq \delta$ ,

$$\|\Phi(x(t)) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \right\| \leq \delta M \leq \alpha.$$

Cette application est en outre  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne puisque, pour  $t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ ,

$$\begin{aligned} \|\Phi(x(\cdot)) - \Phi(y(\cdot))\|_{C^0} &\leq \sup_{|t-t_0| < \delta} \left( \int_{t_0}^t \|f(x(s)) - f(y(s))\| ds \right) \\ &\leq \sup_{|t-t_0| < \delta} \left( \int_{t_0}^t K \|x(s) - y(s)\| ds \right) \\ &\leq \delta K \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C^0} \leq \frac{1}{2} \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C^0}. \end{aligned}$$

Le théorème du point fixe de Picard s'applique et montre que l'application  $\Phi$  admet un unique point fixe dans  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire que le système (4.2) admet une unique solution  $x(\cdot) : ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  à valeurs dans la boule  $\overline{B}(x_0, \alpha)$ .

▷ Il ne reste plus qu'à montrer que toute solution  $x(\cdot) : ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  du système (4.2) est à valeurs dans la boule  $\overline{B}(x_0, \alpha)$ . Par l'absurde, supposons qu'une solution  $x(\cdot)$  de (4.2) sorte de  $\overline{B}(x_0, \alpha)$  en temps inférieur à  $\delta$ , et notons  $t_1$  le premier instant où  $x(\cdot)$  sort de la boule ouverte  $B(x_0, \alpha)$ . D'après le théorème des accroissements finis,

$$\alpha = \|x(t_1) - x_0\| \leq \left( \sup_{t \in [t_0, t_1]} \|x'(t)\| \right) |t_1 - t_0| < M\delta,$$

ce qui contredit  $\delta \leq \alpha/M$ . Toute solution de (4.2) sur  $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$  est donc à valeurs dans  $\overline{B}(x_0, \alpha)$ , ce qui montre le théorème.  $\square$

## Hypothèses plus faibles sur $f$

Nous avons énoncé le théorème de Cauchy-Lipschitz avec l'hypothèse que  $f$  est  $C^1$  sur  $\Omega$  car elle est simple à utiliser et fréquemment satisfaite dans les applications. Remarquons cependant que, dans la preuve, nous avons seulement besoin que  $f$  soit *localement lipschitzienne*, c'est-à-dire que pour tout  $x_0 \in \Omega$ , il existe un voisinage  $U_0$  de  $x_0$  dans  $\Omega$  et une constante  $K$  tels que  $f$  soit  $K$ -lipschitzienne sur  $U_0$ . La conclusion du théorème de Cauchy-Lipschitz reste donc valable sous l'hypothèse que  $f$  est localement lipschitzienne. En particulier, elle est valable si  $f$  est lipschitzienne sur  $\Omega$  (on a même dans ce cas un résultat d'existence et d'unicité globales, voir l'exercice 1.5).

Que se passe-t-il si on affaiblit encore les hypothèses et que l'on suppose  $f$  seulement continue? Un théorème de Peano affirme que, dans ce cas, le système (4.2)

admet toujours une solution. En revanche, l'unicité n'est pas garantie. Par exemple le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad y \in \mathbb{R},$$

admet comme solutions les fonctions  $y_1(t) = 0$  et  $y_2(t) = \frac{t|t|}{4}$ . Il en admet même une infinité puisque, pour tout  $a \geq 0$ , la fonction  $y^a(\cdot)$  définie par

$$y^a(t) = 0 \quad \text{pour } t \leq a, \quad y^a(t) = y_2(t - a) \quad \text{pour } t > a,$$

est également solution.

*Remarque 4.2.* D'après la remarque faite en introduction, le théorème de Cauchy-Lipschitz est également valable pour une équation non-autonome  $x' = f(t, x)$  : si  $f$  est  $C^1$  sur  $J \times \Omega$ , alors, pour  $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ , l'équation a une unique solution définie sur  $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$  et valant  $x_0$  en  $t_0$ .

On peut dans ce cas affaiblir nettement les hypothèses sur  $f$  : en effet, la conclusion du théorème restera valable si on suppose seulement que  $f$  est continue par rapport à  $t$  et *localement lipschitzienne en la seconde variable  $x$* , c'est-à-dire que, pour tout  $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ , il existe un voisinage  $J_0$  de  $t_0$  dans  $J$ , un voisinage  $U_0$  de  $x_0$  dans  $\Omega$  et une constante  $K$  tels que, pour tout  $t \in J_0$ , l'application  $f(t, \cdot)$  est  $K$ -lipschitzienne sur  $U_0$ . La preuve est une simple adaptation de celle que nous avons donnée ici. On verra même dans le théorème 6.1 que la continuité par rapport à  $t$  n'est pas toujours nécessaire.

## 4.2 Solutions maximales et durée de vie

Considérons l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{4.3}$$

où le champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposé de classe  $C^1$ .

Nous avons défini au début de ce chapitre une solution de cette équation comme une fonction  $x(\cdot)$  définie sur un certain intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Cette section est consacrée à l'étude de cet intervalle de définition  $I$ . Nous rencontrerons deux types de problèmes.

- Étant donné un couple  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ , il existe une infinité de solutions de (4.3) satisfaisant la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  : par exemple si  $x(\cdot)$  est une solution définie sur l'intervalle  $I$ , avec  $t_0 \in I$ , toute restriction de  $x(\cdot)$  à un sous-intervalle de  $I$  contenant  $t_0$  est une solution différente. Pour éviter de

considérer comme solutions différentes la même fonction prise sur des sous-intervalles, nous chercherons à associer à une fonction un unique intervalle, le plus grand, sur lequel elle est solution : c'est la notion de *solution maximale*.

- Si on choisit l'intervalle  $I$  le plus grand possible, peut-on le prendre égal à  $\mathbb{R}$  tout entier? Si ce n'est pas le cas, que se passe-t-il pour la solution? et quelle est la forme de  $I$ ? C'est le problème de la *durée de vie* des solutions.

## Solutions maximales

**Définition 4.1.** On dit qu'une solution  $x(\cdot) : I \rightarrow \Omega$  de (4.3) est une solution maximale si elle n'a pas de prolongement à un intervalle strictement plus grand, c'est-à-dire si elle n'est pas la restriction à  $I$  d'une solution définie sur un intervalle  $I' \supsetneq I$ .

Nous allons montrer qu'il existe une unique solution maximale de l'équation (4.3) satisfaisant une condition initiale donnée. Nous avons besoin pour cela d'un résultat d'unicité globale.

**Proposition 4.1.** Si  $x(\cdot)$  et  $y(\cdot) : I \rightarrow \Omega$  sont deux solutions de (4.3) définies sur le même intervalle  $I$  qui coïncident en un point  $t_0 \in I$ , alors elles sont égales.

**Démonstration.** Considérons d'abord le supremum des instants où les solutions coïncident :

$$t_+ = \sup\{t \in I : t > t_0, x(s) = y(s) \text{ pour tout } s \in [t_0, t]\}.$$

Par l'absurde, supposons  $t_+ < \sup I$ . Les solutions étant continues, on a  $x(t_+) = y(t_+)$ . En appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz au couple  $(t_+, x(t_+))$ , on obtient que les deux solutions sont encore égales sur un intervalle  $[t_+, t_+ + \delta[$ , ce qui contredit la définition même de  $t_+$ . Donc  $t_+ = \sup I$ . Le même argument vaut pour l'infimum des instants où les deux solutions coïncident.  $\square$

**Théorème 4.2.** Pour toute donnée initiale  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$ , il existe une unique solution maximale  $x(\cdot) : ]t_-, t_+[ \rightarrow \Omega$  de (4.3) satisfaisant  $x(t_0) = x_0$ . Tout autre solution satisfaisant cette condition initiale est une restriction de  $x(\cdot)$  à un sous-intervalle de  $]t_-, t_+[$ .

**Démonstration.** Soit  $I$  la réunion de tous les intervalles contenant  $t_0$  sur lesquels le système

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (4.2)$$

admet une solution. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, cette réunion est un intervalle ouvert, c'est-à-dire de la forme  $I = ]t_-, t_+[$ . Pour tout  $t \in ]t_-, t_+[$ , définissons  $x(t)$  comme la valeur en  $t$  de n'importe quelle solution de (4.2) définie sur  $[t_0, t]$ . La proposition précédente montre que la fonction  $x(\cdot) : ]t_-, t_+[ \rightarrow \Omega$  ainsi définie est bien solution de (4.2). De plus, par construction, c'est un prolongement de toute autre solution.  $\square$

*Remarque 4.3.* Insistons sur le fait que l'intervalle de définition d'une solution maxi-male est toujours un intervalle ouvert  $]t_-, t_+[$ . Les bornes  $t_+$  et  $t_-$  de l'intervalle maximal sont des fonctions de  $(t_0, x_0)$  qui prennent leurs valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}$  :  $t_+$  peut être soit un réel, soit  $+\infty$ , alors que  $t_-$  peut être soit un réel, soit  $-\infty$ . Dans tous les cas, on a  $t_- < t_0 < t_+$ .

## Durée de vie

On s'intéresse maintenant à l'intervalle de définition  $]t_-, t_+[$  d'une solution maximale  $x(\cdot)$  de (4.3). Cet intervalle peut être différent de  $\mathbb{R}$ , même pour les équations les plus simples.

*Exemple 4.1.* Considérons l'équation  $y'(t) = y^2(t)$  dans  $\mathbb{R}$ , dont la solution valant  $y_0$  en  $t_0$  est

$$y(t) = \frac{y_0}{(t - t_0)y_0 + 1}.$$

L'intervalle maximal de définition de cette solution est  $]t_0 - \frac{1}{y_0}, +\infty[$  si  $y_0 > 0$ ,  $] - \infty, t_0 - \frac{1}{y_0}[$  si  $y_0 < 0$ , et  $\mathbb{R}$  tout entier si  $y_0 = 0$ .

*Exemple 4.2.* Considérons l'équation  $y'(t) = y(t)$  dans  $]0, 1[$ , dont la solution valant  $y_0 \in ]0, 1[$  en  $t_0$  est

$$y(t) = e^{t-t_0}y_0.$$

L'intervalle maximal de définition de cette solution est  $] - \infty, t_0 - \log y_0[$ .

L'idée générale est que, si une solution ne peut être prolongée sur tout  $\mathbb{R}$ , c'est qu'elle s'approche en temps fini du bord de l'ensemble  $\Omega$ . Formalisons cette idée pour la borne supérieure  $t_+$  de l'intervalle (les résultats pour  $t_-$  sont similaires).

**Proposition 4.2.** *Soit  $x(\cdot) : ]t_-, t_+[ \rightarrow \Omega$  une solution maximale de (4.3). Alors, si  $t_+ < +\infty$ ,  $x(t)$  sort de tout compact contenu dans  $\Omega$ , c'est-à-dire que pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe un temps  $t_K \in ]t_-, t_+[$  tel que  $x(t_K) \notin K$ .*

**\*Démonstration.** Soit  $K$  un compact contenu dans  $\Omega$ . Supposons par l'absurde que  $x(]t_-, t_+[)$  soit inclus dans  $K$ . Le champ  $f$  étant continu sur  $\Omega$ , sa norme admet une borne  $M \geq 0$  sur  $K$ ; en particulier,

$$\|f(x(t))\| \leq M \quad \forall t \in ]t_-, t_+[.$$

Ainsi pour toute paire  $t, t' \in ]t_-, t_+[$ , on a :

$$\|x(t') - x(t)\| = \left\| \int_t^{t'} f(x(s))ds \right\| \leq M|t' - t|,$$

ce qui implique par le critère de Cauchy que  $x(t)$  a une limite  $x_+$  quand  $t \rightarrow t_+$ . Appliquons alors le théorème 4.1 en  $(x_+, t_+)$  : on obtient une solution  $\bar{x}(\cdot)$  de l'équation différentielle définie sur un intervalle  $]t_+ - \delta, t_+ + \delta[$  et telle que  $\bar{x}(t_+) = x_+$ . Par conséquent la fonction  $y(\cdot)$  définie par :

$$\begin{cases} y(t) = x(t) & \text{si } t \in ]t_-, t_+[ , \\ y(t) = \bar{x}(t) & \text{si } t \in [t_+, t_+ + \delta[ , \end{cases}$$

est continue et solution de l'équation différentielle. C'est donc un prolongement de  $x(\cdot)$ , ce qui contredit le fait que  $x(\cdot)$  soit une solution maximale.  $\square$

On rencontrera le cas  $t_+ < +\infty$  essentiellement dans les deux situations suivantes :

- quand  $\Omega = \mathbb{R}^n$  et  $\lim_{t \rightarrow t_+} \|x(t)\| = +\infty$  : c'est le phénomène *d'explosion en temps fini* (voir l'exemple 4.1 ci-dessus);
- quand le bord de  $\Omega$  est borné et  $x(t)$  converge vers un point du bord quand  $t \rightarrow t_+$  (voir l'exemple 4.2).

Inversement, retenons une condition suffisante pour que  $]t_-, t_+[ = \mathbb{R}$ .

**Corollaire 4.1.** *Si toutes les valeurs d'une solution maximale  $x(\cdot)$  sont contenues dans un compact inclus dans  $\Omega$ , alors  $x(\cdot)$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$ .*

### Champs de vecteurs complets

**Définition 4.2.** *On dit que le champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est complet (ou que l'équation associée est complète) si toute solution maximale est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.*

D'après le corollaire précédent, si toutes les solutions maximales sont contenues dans des compacts, le champ est complet. On a vu aussi au théorème 2.1 que tous les champs linéaires  $f(x) = Ax$  sur  $\mathbb{R}^n$  sont complets. C'est en fait le cas de tous les champs définis sur  $\mathbb{R}^n$  admettant une majoration affine.

**Proposition 4.3.** *Tout champ de vecteurs  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  admettant une majoration linéaire*

$$\|f(x)\| \leq \alpha \|x\| + \beta,$$

*avec  $\alpha, \beta \geq 0$ , est complet (c'est en particulier le cas des champs bornés).*

Cette proposition est une conséquence d'un résultat très utile, le lemme de Gronwall, dont nous verrons par la suite plusieurs applications (nous en avons déjà vu une, voir exercice 3.3).

**Lemme 4.1 (lemme de Gronwall).** *Soient  $u, v$  deux fonctions continues de  $[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  à valeurs positives telles que, pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ ,*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds,$$

*où  $C \geq 0$  est une constante. Alors, pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ ,*

$$u(t) \leq C \exp \left( \int_{t_0}^t v(s)ds \right).$$

**Démonstration.** Posons  $V(t) = \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds$ , qui est une fonction  $C^1$ . Sa dérivée satisfait

$$V'(t) = u(t)v(t) \leq Cv(t) + V(t)v(t),$$

d'où  $V' - vV \leq Cv$ . En multipliant par  $\exp(-\int_{t_0}^t v(s)ds)$ , on obtient

$$(V(t)e^{-\int_{t_0}^t v(s)ds})' \leq -(Ce^{-\int_{t_0}^t v(s)ds})'.$$

Intégrons entre  $t_0$  et  $t$  :

$$V(t)e^{-\int_{t_0}^t v(s)ds} \leq C - Ce^{-\int_{t_0}^t v(s)ds} \Rightarrow V(t) \leq Ce^{\int_{t_0}^t v(s)ds} - C.$$

Comme  $u(t) \leq C + V(t)$ , on obtient la conclusion.  $\square$

On est maintenant en mesure de prouver la proposition.

**Démonstration de la proposition 4.3.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteur admettant une majoration linéaire. Supposons par l'absurde qu'il n'est pas complet. Il existe donc une solution maximale  $x(\cdot)$  dont l'intervalle de définition  $]t_-, t_+[$  n'est pas égal à  $\mathbb{R}$ . Supposons par exemple  $t_+ < \infty$ ; d'après la proposition 4.2, on a alors  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow t_+$ . Fixons  $t_0 \in ]t_-, t_+[$ . Pour tout  $t \in [t_0, t_+[$ , on a :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s))ds.$$

En utilisant la majoration de  $f$ , on obtient

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t (\alpha\|x(s)\| + \beta)ds \leq \|x(t_0)\| + \beta(t_+ - t_0) + \int_{t_0}^t \alpha\|x(s)\|ds,$$

et donc, en appliquant le lemme de Gronwall,  $\|x(t)\| \leq (\|x(t_0)\| + \beta(t_+ - t_0))e^{\alpha(t_+ - t_0)}$ . Ainsi  $\|x(t)\|$  est borné sur  $[t_0, t_+[$ , ce qui contredit le fait que  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$  quand  $t \rightarrow t_+$ .  $\square$

### 4.3 Flots, portraits de phase

Considérons à nouveau une équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{4.3}$$

où le champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposé de classe  $C^1$ . Une des spécificités de cette équation est qu'elle ne dépend pas explicitement du temps (d'où le qualificatif autonome). En particulier, les solutions sont invariantes par translation du temps : si  $x(\cdot)$  est solution,  $x(t_0 + \cdot)$  aussi.

**Proposition 4.4.** Soit  $x(\cdot) : ]t_-, t_+[ \rightarrow \Omega$  une solution maximale de (4.3) et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Alors  $\bar{x} : t \mapsto x(t + t_0)$ , définie sur  $]t_- - t_0, t_+ - t_0[$ , est également une solution maximale de (4.3).



Ainsi le temps n'a pas de rôle intrinsèque ici et on pourra se limiter aux données initiales en  $t = 0$ . Pour un point  $x \in \Omega$ , notons  $\phi(\cdot, x)$  la solution maximale de (4.3) valant  $x$  en  $t = 0$  et  $I_x = ]t_-, t_+[$  son intervalle de définition. Autrement dit,  $\phi(\cdot, x)$  est la solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x) = f(\phi(t, x)), \\ \phi(0, x) = x, \end{cases} \quad \forall t \in I_x.$$

**Définition 4.3.** *L'application  $(t, x) \mapsto \phi(t, x)$  est appelée le flot du champ de vecteurs  $f$  (ou de l'équation  $x' = f(x)$ ).*

Par définition, l'application partielle à  $x$  fixé,  $t \mapsto \phi(t, x)$ , est une solution maximale de l'équation. Pour une étude qualitative de l'équation différentielle, il est important d'étudier plutôt l'autre application partielle,  $\phi_t : x \mapsto \phi(t, x)$ , pour  $t$  fixé. De façon imagée,  $\phi_t(x)$  est la position à l'instant  $t$  d'un corps transporté par l'équation différentielle qui se trouvait à la position  $x$  en  $t = 0$ .

*Exemple 4.3.* Si  $f$  est linéaire, i.e.  $f(x) = Ax$ ,  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ , le flot est donné par l'exponentielle de  $A$  :

$$\phi_t(x) = e^{tA}x, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Ainsi le flot est une généralisation de l'exponentielle de matrice. Il possède des propriétés similaires.

**Proposition 4.5 (formule du flot).** *Si  $t_1 \in I_x$  et  $t_2 \in I_{\phi_{t_1}(x)}$ , alors  $t_1 + t_2 \in I_x$  et*

$$\phi_{t_1+t_2}(x) = \phi_{t_2} \circ \phi_{t_1}(x).$$

*En particulier, si  $t \in I_x$ ,*

$$\phi_{-t} \circ \phi_t(x) = x$$

**Démonstration.** D'après la proposition sur l'invariance par translation du temps, la fonction  $t \mapsto \phi_{t_1+t}(x)$  est la solution maximale valant  $\phi_{t_1}(x)$  en  $t = 0$ , ce qui est la définition de la fonction  $t \mapsto \phi_t(\phi_{t_1}(x))$ .  $\square$

*Remarque 4.4.* La formule du flot peut aussi se lire de la façon suivante : si  $x(\cdot)$  est une solution de (4.3), alors

$$x(t) = \phi_{t-t_0}(x(t_0))$$

pour tous  $t_0$  et  $t$  dans l'intervalle de définition de  $x(\cdot)$ .

Le domaine de définition du flot est l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in I_x\}.$$

Pour obtenir des propriétés intéressantes sur le flot (continuité, différentiabilité), il est nécessaire de montrer d'abord que son domaine de définition  $\mathcal{D}$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Nous le verrons dans la section suivante.

Il y a cependant déjà un cas où cela est évident : si  $f$  est un champ de vecteurs complet sur  $\Omega$ , c'est-à-dire si  $I_x = \mathbb{R}$  pour tout  $x \in \Omega$ , le domaine de définition du flot est  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \Omega$ . On peut alors réécrire les propriétés du flot de façon globale : pour tous  $t, s \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ ;
2.  $\phi_{-t} \circ \phi_t = \text{id}$ , c'est-à-dire  $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ ;
3.  $\phi_0 = \text{id}$ ;
4.  $\frac{\partial}{\partial t} \phi_t = f \circ \phi_t$ .

Les trois premières propriétés montrent en particulier que  $\phi_t$  obéit à une loi de groupe.

## Orbites et portraits de phase

**Définition 4.4.** On appelle orbite d'un point  $x_0 \in \Omega$  (ou trajectoire passant par  $x_0$ ) l'ensemble

$$\mathcal{O}_{x_0} = \{\phi_t(x_0) : t \in I_{x_0}\}.$$

Autrement dit, l'orbite de  $x_0$  est la courbe tracée sur  $\mathbb{R}^n$  par la solution maximale de l'équation (4.3) passant par  $x_0$  en  $t = 0$ .

La propriété d'invariance par translation du temps implique que, pour tout point  $x \in \mathcal{O}_{x_0}$ , on a  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{x_0}$ . En effet, dans ce cas, il existe un instant  $t_0$  tel que  $x = \phi_{t_0}(x_0)$ . Tout point  $y$  de  $\mathcal{O}_x$  s'écrit alors  $y = \phi_t(x) = \phi_{t+t_0}(x_0)$ , c'est-à-dire  $y \in \mathcal{O}_{x_0}$ . En particulier, ceci implique que deux orbites distinctes ne peuvent pas se croiser. Chaque point de  $\Omega$  appartient donc à une et une seule orbite.

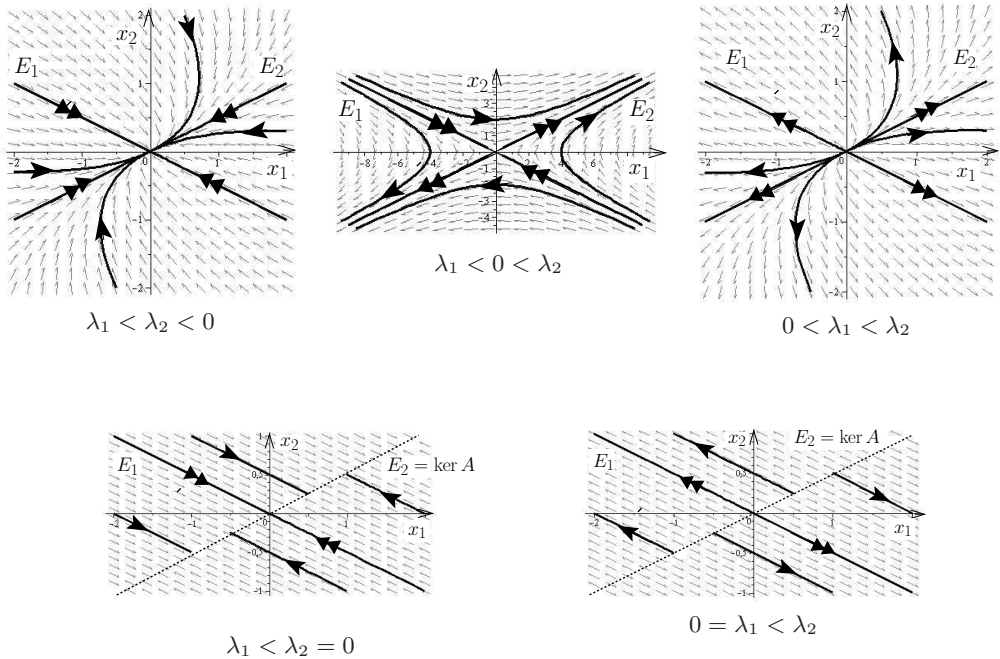
La partition de  $\Omega$  en orbites s'appelle le *portrait de phase* du champ de vecteurs. On y trouve trois sortes d'orbites :

- des points, *i.e.*  $\mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\}$  : un tel point vérifie nécessairement  $f(x_0) = 0$ . C'est ce que l'on appelle un *point d'équilibre* (voir le chapitre 5).
- des courbes fermées : il existe alors un point  $x$  dans l'orbite et un temps  $T > 0$  tels que  $\phi_T(x) = x$ . Ceci implique  $\phi_{t+T}(x) = \phi_t(x)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire que la solution maximale  $\phi(\cdot, x)$  est  $T$ -périodique. On parlera dans ce cas d'*orbite périodique*.

- des courbes ouvertes : il n'y a alors aucun point double, *i.e.* si  $t \neq s$ , alors  $\phi_t(x) \neq \phi_s(x)$ .

On porte habituellement sur le dessin d'un portrait de phase le sens de parcours des orbites.

*Exemple 4.4.* Considérons le champ de vecteurs linéaire  $f(x) = Ax$  dans  $\mathbb{R}^2$ , et supposons que la matrice  $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  a deux valeurs propres réelles et distinctes  $\lambda_1 < \lambda_2$ . L'étude réalisée dans la section 2.4 permet de déterminer la forme du portrait de phase en fonction de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Nous avons représenté les différentes possibilités dans la figure 4.1, où nous avons noté  $E_1$  et  $E_2$  les sous-espaces propres associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .



**Fig. 4.1.** Exemples de portraits de phase pour  $f(x) = Ax$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

## 4.4 Linéarisation et perturbation du flot

Dans la pratique, on n'a quasiment jamais une connaissance exacte des conditions initiales (ni de l'équation elle-même, en fait). Il est donc primordial de savoir

ce qui se passe pour la solution d'une équation différentielle lorsque la condition initiale est perturbée (ou quand l'équation elle-même est perturbée) : comment varie l'intervalle de définition et les valeurs de la solution, peut-on donner un ordre de grandeur de ces variations, ... ? Les réponses à ces questions sont contenues dans le théorème ci-dessous : donnons d'abord le théorème et sa preuve, nous expliquerons ensuite pourquoi il permet de répondre aux questions précédentes. Rappelons que nous considérons une équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (4.3)$$

où le champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposé de classe  $C^1$ .

**Théorème 4.3.** *Soit  $\bar{x}(\cdot)$  une solution de l'équation (4.3) définie sur un intervalle  $[0, T]$ . Il existe alors un voisinage  $\mathcal{V} \subset \Omega$  de  $\bar{v} = \bar{x}(0)$  tel que, pour tout  $v \in \mathcal{V}$ , l'équation (4.3) admet une unique solution  $x_v(\cdot)$  définie sur  $[0, T]$  et vérifiant  $x_v(0) = v$ .*

*De plus, l'application  $v \mapsto x_v(\cdot)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathcal{V}$  et sa différentielle en  $\bar{v}$  est l'application qui à  $\delta v \in \mathbb{R}^n$  associe la solution de*

$$\begin{cases} y'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot y(t), \\ y(0) = \delta v, \end{cases} \quad t \in [0, T].$$

**Remarque 4.5.** La solution  $x_v(\cdot)$  est simplement la restriction de la solution maximale  $\phi(\cdot, v)$  à l'intervalle  $[0, T]$ .

**\*Démonstration.** Soit  $\mathcal{F} = C^1([0, T], \Omega)$  l'ensemble des fonctions  $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow \Omega$  de classe  $C^1$ ; c'est un ouvert de  $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ , qui, muni de la norme  $C^1$ , est un espace de Banach (voir section 1.5). Considérons l'application  $\Phi : \mathcal{F} \times \Omega \rightarrow C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  définie par

$$\Phi(x(\cdot), v) = x(\cdot) - v - \int_0^\cdot f(x(s)) ds,$$

qui est une application  $C^1$  puisque  $f$  est de classe  $C^1$ . Nous voulons appliquer le théorème des fonctions implicites à  $\Phi$  en  $(\bar{x}(\cdot), \bar{v})$ . Pour cela, nous devons vérifier que l'application  $D_{x(\cdot)}\Phi(\bar{x}(\cdot), \bar{v})$  est inversible dans  $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ . Calculons cette différentielle :

$$D_{x(\cdot)}\Phi(\bar{x}(\cdot), \bar{v}) \cdot \delta x(\cdot) = \delta x(\cdot) - \int_0^\cdot Df(\bar{x}(s)) \cdot \delta x(s) ds. \quad (4.4)$$

Elle est inversible si,  $y(\cdot) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  étant donné, on peut toujours trouver une unique fonction  $\delta x(\cdot) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  telle que  $D_{x(\cdot)}\Phi(\bar{x}(\cdot), \bar{v}) \cdot \delta x(\cdot) = y(\cdot)$ , soit

$$\delta x(\cdot) - \int_0^\cdot Df(\bar{x}(s)) \cdot \delta x(s) ds = y(\cdot).$$

En dérivant par rapport à  $t$  ( $y$  est  $C^1$ ), on voit qu'il s'agit de résoudre :

$$\begin{cases} (\delta x)'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot \delta x(t) + y'(t), & \forall t \in ]0, T[, \\ \delta x(0) = y(0). \end{cases} \quad (4.5)$$

Or l'équation différentielle ci-dessus est affine. Nous savons donc que (4.5) admet toujours une unique solution sur  $]0, T[$  qui est de plus dans  $C^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ . Le théorème des fonctions implicites nous dit alors qu'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{v}$  dans  $\Omega$  et une application  $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$  tels que, pour tout  $v \in \mathcal{V}$ ,

$$\Phi(\psi(v), v) = 0,$$

c'est-à-dire que  $\psi(v)$  est solution de l'équation (4.3) et vérifie  $x_v(0) = v$ . Ceci montre la première partie du théorème.

▷ Toujours d'après le théorème des fonctions implicites, l'application  $\psi$  est de classe  $C^1$  et sa différentielle en  $\bar{v}$  est

$$-[D_{x(\cdot)}\Phi(\bar{x}(\cdot), \bar{v})]^{-1} \circ D_v\Phi(\bar{x}(\cdot), \bar{v}).$$

Comme  $D_v\Phi(\bar{x}(\cdot), \bar{v}) \cdot \delta v = -\delta v$ , on obtient, en utilisant à nouveau l'expression (4.4) de  $D_{x(\cdot)}\Phi(\bar{x}(\cdot), \bar{v})$ , que  $D\psi(\bar{v}) \cdot \delta v$  est la solution de (4.5) avec  $y(\cdot) \equiv \delta v$ , c'est-à-dire que  $D\psi(\bar{v}) \cdot \delta v$  est la solution de

$$\begin{cases} (\delta x)'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot \delta x(t), \\ \delta x(0) = \delta v, \end{cases}$$

ce qui montre la seconde partie du théorème. □

### Conséquences et signification du théorème 4.3

#### a. Domaine de définition du flot

La première conséquence est que, pour toute condition initiale  $v$  dans le voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{x}(0)$ , la solution maximale  $\phi(\cdot, v)$  est définie sur tout l'intervalle  $[0, T]$ , i.e.  $[0, T] \subset I_v$ . Autrement dit, de façon informelle, si une solution est définie sur un temps « long », les solutions voisines sont également définies sur un temps « long ». Ceci se traduit par une propriété du domaine de définition du flot.

**Corollaire 4.2.** *Le flot  $\phi$  est défini sur un ouvert  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R} \times \Omega$ . En particulier, si  $(t, \bar{v}) \in \mathcal{D}$ , alors l'application  $\phi_t$  est définie sur un voisinage de  $\bar{v}$  (voir figure 4.2).*

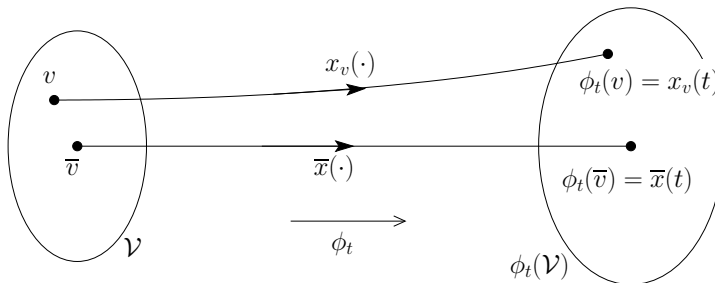


Fig. 4.2. Domaine de définition du flot  $\phi_t$ .

Cette propriété est très importante pour l'étude du flot et de sa dépendance par rapport aux conditions initiales : en effet,  $\phi$  et  $\phi_t$  étant définies sur des ouverts, il est maintenant possible d'étudier leur continuité et leur différentiabilité.

**Démonstration.** Rappelons que le domaine de définition du flot est

$$\mathcal{D} = \{(t, v) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in I_v\}.$$

Soit  $(t, \bar{v}) \in \mathcal{D}$ . Puisque l'intervalle maximal  $I_{\bar{v}}$  est ouvert (théorème 4.2), la solution maximale  $\phi(\cdot, \bar{v})$  est définie sur un intervalle  $[0, T] \subset I_{\bar{v}}$  contenant  $t$ . Le théorème 4.3 implique alors que, pour tout  $v$  dans un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{v}$ , on a encore  $[0, T] \subset I_v$ , c'est-à-dire que l'ensemble  $]0, T[ \times \mathcal{V}$ , qui est un voisinage de  $(t, \bar{v})$  dans  $\mathbb{R} \times \Omega$ , est inclus dans  $\mathcal{D}$ .  $\square$

### b. Dépendance continue

L'application  $v \mapsto x_v(\cdot)$  définie dans le théorème 4.3 est l'application qui à une condition initiale dans  $\mathcal{V}$  associe la solution correspondante de l'équation différentielle sur  $[0, T]$ . Cette application étant  $C^1$ , elle est en particulier continue :

*les solutions de l'équation différentielle (4.3) dépendent de façon continue de leur condition initiale.*

C'est une propriété essentielle : en effet elle signifie, grosso modo, que la solution calculée à partir d'une approximation de la condition initiale est une approximation de la vraie solution. Ceci justifie l'utilisation des équations différentielles dans la modélisation de phénomènes réels, où l'on ne dispose que d'une connaissance approximative des données, et de méthodes numériques pour les résoudre.

Notons que la dépendance continue peut également s'obtenir à partir d'une estimation de la divergence des solutions, qui résulte du lemme de Gronwall (lemme 4.1).

**Lemme 4.2.** *Si, pour tout  $x \in \Omega$ , la norme de  $Df(x)$  est majorée par une constante  $K > 0$ , alors pour tout couple  $\bar{v}, v$  dans  $\Omega$ ,*

$$\|\phi_t(v) - \phi_t(\bar{v})\| \leq e^{Kt} \|v - \bar{v}\|, \quad \forall t \in I_v \cap I_{\bar{v}}.$$

**\*Démonstration.** D'après les hypothèses,  $f$  est lipschitzienne de rapport  $K$  sur  $\Omega$ . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \|\phi_t(v) - \phi_t(\bar{v})\| &= \left\| v - \bar{v} + \int_0^t (f(\phi_s(v)) - f(\phi_s(\bar{v}))) ds \right\| \\ &\leq \|v - \bar{v}\| + \int_0^t K \|\phi_s(\bar{v}) - \phi_s(v)\| ds. \end{aligned}$$

On conclut alors en appliquant le lemme de Gronwall.  $\square$

### c. Équation linéarisée

La dernière partie du théorème 4.3 affirme que les valeurs de la différentielle de l'application  $\psi : v \mapsto x_v(\cdot)$  sont les solutions d'une certaine équation linéaire. Cette équation linéaire joue un rôle important dans la suite.

**Définition 4.5.** Soit  $\bar{x}(\cdot) : [0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$  une solution de (4.3). L'équation linéaire dans  $\mathbb{R}^n$

$$y'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot y(t), \quad t \in [0, T],$$

est appelée équation linéarisée de (4.3) autour de  $\bar{x}(\cdot)$ .

Pour tout  $\delta v \in \mathbb{R}^n$ ,  $D\psi(\bar{x}(0)) \cdot \delta v$  est la solution de l'équation linéarisée autour de  $\bar{x}(\cdot)$  valant  $\delta v$  en  $t = 0$ . En notant  $R(t, s)$  la résolvante de l'équation linéarisée autour de  $\bar{x}(\cdot)$ , on obtient, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$(D\psi(\bar{x}(0)) \cdot \delta v)(t) = R(t, 0)\delta v.$$

Intéressons-nous maintenant à l'application  $\phi_t$ . Fixons un point  $\bar{v}$  de  $\Omega$  et un instant  $t \in I_{\bar{v}}$ . D'après le théorème 4.3, l'application  $\phi_t$  est définie et de classe  $C^1$  sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{v}$  dans  $\Omega$ . Avec les notations ci-dessus, on a clairement  $\phi_t(v) = x_v(t) = (\psi(v))(t)$  et donc

$$D\phi_t(\bar{v}) \cdot \delta v = (D\psi(\bar{v}) \cdot \delta v)(t).$$

On en déduit le résultat suivant.

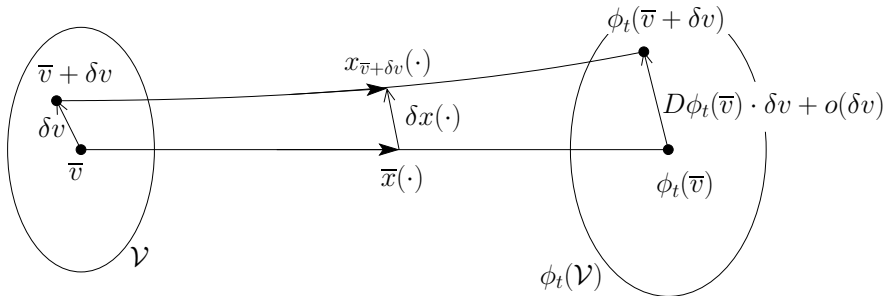
**Corollaire 4.3.** Soient  $\bar{v} \in \Omega$  et  $t \in I_{\bar{v}}$ . L'application  $\phi_t$  est de classe  $C^1$  sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{v}$  et

$$D\phi_t(\bar{v}) = R(t, 0),$$

où  $R$  est la résolvante de l'équation linéarisée

$$y'(s) = Df(\phi_s(\bar{v})) \cdot y(s), \quad s \in [0, t].$$

On peut donner une explication plus intuitive du rôle de l'équation linéarisée. On



**Fig. 4.3.** Perturbation du flot.

choisit une solution  $\bar{x}(\cdot) : [0, T] \rightarrow \Omega$  de l'équation différentielle, de condition initiale  $\bar{v} = \bar{x}(0)$ . Considérons maintenant une perturbation  $\bar{v} + \delta v$  de la condition

initiale et écrivons la solution correspondante,  $x_{\bar{v}+\delta v}(\cdot)$ , sous la forme d'une perturbation  $\bar{x}(\cdot) + \delta x(\cdot)$  de la solution d'origine (voir figure 4.3). Cette perturbation étant une solution, elle doit satisfaire l'équation différentielle :

$$\bar{x}'(t) + (\delta x)'(t) = f(\bar{x}(t) + \delta x(t)), \quad t \in [0, T].$$

En utilisant un développement limité de  $f$  en  $\bar{x}(t)$  (à  $t$  fixé) :

$$f(\bar{x}(t) + \delta x(t)) = f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t)) \cdot \delta x(t) + \text{reste},$$

et en tenant compte du fait que  $\bar{x}'(t) = f(\bar{x}(t))$ , on obtient

$$(\delta x)'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot \delta x(t) + \text{reste}.$$

En ne conservant que les « termes du premier ordre » on retrouve l'équation linéarisée  $(\delta x)'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot \delta x(t)$ . Autrement dit, la solution perturbée s'écrit  $\bar{x}(\cdot) + \delta x(\cdot) + \text{reste}$ , où le « terme du premier ordre »  $\delta x(\cdot)$  est la solution de

$$\begin{cases} (\delta x)'(t) = Df(\bar{x}(t)) \cdot (\delta x)(t), \\ (\delta x)(0) = \delta v. \end{cases}$$

L'équation linéarisée indique donc comment se propage au cours du temps une perturbation de la condition initiale. Bien entendu ce qui précède n'est pas un raisonnement rigoureux (les restes posent évidemment quelques problèmes!), seulement une heuristique.

*Remarque 4.6.* L'équation linéarisée est en général une équation linéaire non-autonome, on ne sait donc pas a priori calculer ses solutions. Cependant, si  $\bar{v}$  est un point d'équilibre, la solution maximale  $\bar{x}(\cdot) = \phi(\cdot, \bar{v})$  est la fonction constante  $\bar{x}(\cdot) \equiv \bar{v}$ , définie sur tout  $\mathbb{R}$ , et dans ce cas l'équation linéarisée est autonome :

$$y'(t) = Df(\bar{v}) \cdot y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Exemple d'application : champs de vecteurs à divergence nulle.* Rappelons que la divergence d'un champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , noté  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ , est définie comme

$$\operatorname{div} f(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) = \operatorname{tr} Df(x).$$

Considérons alors un temps  $t$  et un domaine  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^n$ , supposé inclus dans le domaine de définition de  $\phi_t$ . Notons  $\Gamma_t = \phi_t(\Gamma)$  le transport de  $\Gamma$  de 0 à  $t$  par l'équation (4.3). En utilisant la formule de changement de variable dans les intégrales multiples, on obtient



$$\text{vol}(\Gamma_t) = \int_{\phi_t(\Gamma)} d\mu = \int_{\Gamma} |\det D\phi_t(x)| d\mu,$$

où, d'après le corollaire 4.3,  $D\phi_t(x)$  est la résolvante de l'équation linéarisée.

Supposons maintenant que  $\text{div } f(x) = \text{tr } Df(x) \equiv 0$ . Le théorème de Liouville (corollaire 3.1) implique que le déterminant de la résolvante du linéarisé est égal à 1, et donc que  $\det D\phi_t(x) = 1$ . On a alors  $\text{vol}(\Gamma_t) = \text{vol}(\Gamma)$  :

*si  $f$  est un champ de divergence nulle, le flot de  $f$  préserve le volume.*

### Dépendance par rapport à un paramètre

Considérons maintenant une famille d'équations différentielles dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ ,

$$x'(t) = f_{\lambda}(x(t)), \quad (4.6)$$

où chaque  $f_{\lambda}$  est un champ de vecteurs sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Supposons également que  $f(x, \lambda) = f_{\lambda}(x)$  est une application de classe  $C^1$ . On s'intéresse à la dépendance des solutions de ces équations différentielles par rapport au paramètre  $\lambda$ .

Remarquons d'abord que l'équation (4.6) est équivalente à

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), \lambda), \\ \lambda'(t) = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire à l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^{n+p}$  associée au champ de vecteurs  $F(x, \lambda) = (f(x, \lambda), 0)$ . Ainsi, les solutions de (4.6) dépendent du paramètre  $\lambda$  de la même façon que les solutions de l'équation différentielle  $(x, \lambda)'(t) = F((x, \lambda)(t))$  dépendent de leur condition initiale. D'après ce que nous avons vu précédemment dans cette section, nous avons donc les propriétés suivantes.

- Les solutions  $\phi^{\lambda}(\cdot, v)$  de (4.6) dépendent de façon  $C^1$ , donc continue, du paramètre  $\lambda$  (et de la condition initiale  $v$ ).
- La différentielle de l'application  $(v, \lambda) \mapsto \phi^{\lambda}(\cdot, v)$  en un point  $(\bar{v}, \bar{\lambda})$  est l'application qui à  $(\delta v, \delta \lambda)$  associe la solution  $y(\cdot)$  de l'équation différentielle affine

$$\begin{cases} y'(t) = D_x f(\bar{x}(t), \bar{\lambda}) \cdot y(t) + D_{\lambda} f(\bar{x}(t), \bar{\lambda}) \cdot \delta \lambda, \\ y(0) = \delta v, \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $\bar{x}(\cdot) = \phi^{\bar{\lambda}}(\cdot, \bar{v})$ . Autrement dit, en utilisant la formule de variation de la constante,

$$y(t) = R(t, 0)\delta v + \int_0^t R(t, s)D_{\lambda} f(\bar{x}(s), \bar{\lambda}) \cdot \delta \lambda ds,$$

où  $R(t, s)$  est la résolvante de l'équation linéarisée  $y'(t) = D_x f(\bar{x}(t), \bar{\lambda}) \cdot y(t)$ .

### \*Application de Poincaré

Supposons que l'équation (4.3) admette une solution  $T$ -périodique non triviale  $x(\cdot)$  et notons  $x(0) = x_0$ . Traçons un hyperplan affine  $\Sigma$  passant par  $x_0$  et *transverse* à  $x(\cdot)$  en  $x_0$ , c'est-à-dire que  $f(x_0)$  n'est pas parallèle à  $\Sigma$  (notez que  $f(x_0) \neq 0$  puisque  $x(\cdot)$  est non triviale). Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on suppose que  $f(x_0) = e_1$  et que  $\Sigma$  est l'hyperplan affine passant par  $x_0$  parallèle à  $\text{Vect}\{e_2, \dots, e_n\}$ , où  $e_1, \dots, e_n$  désignent comme d'habitude les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 4.6.** *Il existe des voisinages  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_0$  et une fonction  $\eta$  de classe  $C^1$  tels que, pour tout  $z$  dans  $\Sigma \cap \mathcal{V}_1$ ,  $\phi_{T+\eta(z)}(z)$  appartient à  $\Sigma \cap \mathcal{V}_2$ . L'application  $G : \Sigma \cap \mathcal{V}_1 \rightarrow \Sigma \cap \mathcal{V}_2$  ainsi définie est un  $C^1$ -difféomorphisme : c'est l'application de premier retour de Poincaré.*

On a en outre, pour tout  $(\delta s, \delta z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$D\phi_T(x_0) \cdot \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & D_z G(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta z \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

**Démonstration.** Quitte à faire une translation sur les coordonnées, on suppose  $x_0 = 0$ , et par conséquent  $\Sigma = \text{Vect}\{e_2, \dots, e_n\}$ . Appelons  $p_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}e_1$  la projection sur  $\mathbb{R}e_1$  parallèlement à  $\Sigma$  et  $\tilde{p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma$  la projection complémentaire sur  $\Sigma$ . Ainsi,  $\Sigma$  coïncide avec l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^n$  tels que  $p_1(x) = 0$ .

▷ Soit  $\phi$  le flot du champ de vecteurs  $f$  (voir définition 4.3). On cherche les trajectoires qui coupent l'hyperplan  $\Sigma$ , c'est-à-dire les couples  $(t, x)$  tels que  $p_1(\phi(t, x)) = 0$ . Or l'application  $p_1 \circ \phi$  est de classe  $C^1$ ,  $p_1 \circ \phi(T, x_0) = 0$  et

$$\frac{\partial(p_1 \circ \phi)}{\partial t}(T, x_0) = p_1\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(T, x_0)\right) = p_1(f(x(T))) = p_1(f(x_0)) \neq 0.$$

Les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont satisfaites : il existe donc un voisinage  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_0$  et une fonction  $\eta : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\phi(T + \eta(z), z) \in \Sigma$  pour  $z \in \mathcal{V}$ . On peut donc définir l'application de Poincaré  $G : \Sigma \cap \mathcal{V} \rightarrow \Sigma$  par  $G(z) = \tilde{p} \circ \phi(T + \eta(z), z)$  pour tout  $z \in \Sigma \cap \mathcal{V}$ .

▷ Commençons par montrer que la différentielle du flot  $D\phi_T(x_0) = D_x \phi(T, x_0)$  est de la forme annoncée. Remarquons que, la solution  $x(\cdot)$  étant  $T$ -périodique, on a  $\phi_T(x(t)) = x(t)$  pour tout  $t$ . En dérivant par rapport à  $t$  puis en prenant la valeur en  $t = 0$ , on obtient

$$D\phi_T(x_0) \cdot f(x_0) = f(x_0).$$

Ainsi  $f(x_0) = e_1$  est vecteur propre de  $D\phi_T(x_0)$  associé à la valeur propre 1 et

$$D\phi_T(x_0) \cdot \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p_1(D_z \phi(T, x_0)) \\ 0 & \tilde{p}(D_z \phi(T, x_0)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta s \\ \delta z \end{pmatrix}.$$

Or la différentielle de  $G$  en  $x_0$  est l'application linéaire :

$$\delta z \in \Sigma \mapsto D_z G(x_0) \cdot \delta z = \tilde{p}[D_t \phi(T, x_0) \cdot (D\eta(x_0) \cdot \delta z) + D_z \phi(T, x_0) \cdot \delta z].$$

Dans cette expression,  $(D\eta(x_0) \cdot \delta z)$  est un réel et le vecteur

$$D_t \phi(T, x_0) \cdot (D\eta(x_0) \cdot \delta z) = (D\eta(x_0) \cdot \delta z) \frac{\partial \phi}{\partial t}(T, x_0) = (D\eta(x_0) \cdot \delta z) f(x_0),$$

est annulé par  $\tilde{p}$ . On en déduit que  $D_z G(x_0) = \tilde{p}(D_z \phi(T, x_0))$ , d'où l'expression (4.8) de  $D\phi_T(x_0)$ .

▷ Il reste à montrer que  $G$  est un  $C^1$ -difféomorphisme entre des voisinages de  $x_0$  (définition 1.4). Le flot  $\phi_T$  étant lui-même un  $C^1$ -difféomorphisme, sa différentielle  $D\phi_T(x_0)$  est inversible. Il résulte alors de l'expression (4.8) que  $D_z G(x_0)$  est également inversible. Par conséquent le théorème d'inversion locale s'applique à  $G$  en  $x_0$  et permet de conclure.  $\square$

*Remarque 4.7.* L'application de Poincaré ne dépend que de la section  $\Sigma$  transverse à l'orbite, elle a donc un sens géométrique très fort. Notons d'autre part que cette construction permet de passer de l'étude d'un flot en dimension  $n$  à celui d'un difféomorphisme local en dimension  $n - 1$ .

## 4.5 Exercices corrigés

### Exercice 4.1 (Durée de vie).

On considère l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^2$  suivante, issue de la modélisation des solitons (voir l'exercice 5.5 pour les détails) :

$$\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = -3x^2 - 12x. \end{cases} \quad (4.9)$$

1. Montrer que la fonction  $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C(x, y) = x^3 + 6x^2 + y^2$ , est constante le long des solutions de (4.9).

Les courbes de niveau de  $C$  sont représentées figure 4.4. On note  $\gamma$  la courbe de niveau (en gras sur la figure) qui passe par le point  $A = (-4, 0)$  et  $\Omega$  la région à l'intérieur de la boucle formée par  $\gamma$ .

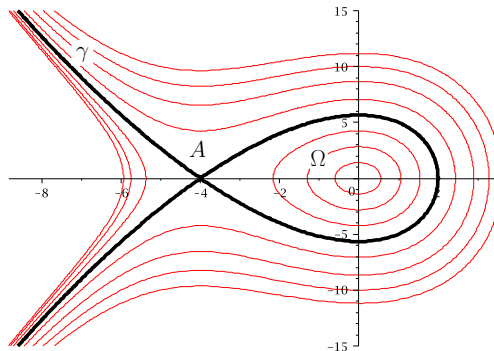


Fig. 4.4. Courbes de niveau:  $C(x, y) = \text{constante}$ .

2. Montrer que toute solution maximale de (4.9) issue d'un point de  $\Omega$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$ .

**3.** Que peut-on dire sur l'intervalle de définition d'une solution issue d'un point  $v$  de  $\gamma$  (plusieurs possibilités selon la position de  $v$ )?

**4.** Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{cases} x' = 2y + (C(x, y) - 32)y, \\ y' = -3x^2 - 12x + (C(x, y) - 32)x. \end{cases} \quad (4.10)$$

Que peut-on dire sur la durée de vie des solutions issues d'un point de  $\gamma$ ? Et de celles issues d'un point de  $\Omega$ ? (Indication : remarquer que  $C(x, y) = 32$  sur  $\gamma$ ).

**5. Question subsidiaire :** dessiner le portrait de phase de l'équation (4.9), en identifiant les différents types d'orbites.

### Corrigé de l'exercice 4.1.

**1.** Il faut montrer que, pour toute solution  $(x(t), y(t))$  de l'équation (4.9), la fonction  $t \mapsto C(x(t), y(t))$  est constante. Or

$$\frac{d}{dt}C(x(t), y(t)) = 3x^2x' + 12xx' + 2yy'.$$

En remplaçant  $x'$  et  $y'$  par les valeurs données dans l'équation (4.9), on obtient bien  $\frac{d}{dt}C(x(t), y(t)) = 0$ .

**2.** Toute solution est incluse dans une courbe de niveau de  $C$ . Les courbes de niveau dans  $\Omega$  étant compactes, les solutions sont définies sur tout  $\mathbb{R}$ .

**3.** Soit  $X_v(\cdot) = (x_v(\cdot), y_v(\cdot))$  la solution issue d'un point  $v \in \gamma$ . On sait déjà que toutes les valeurs de  $X_v(\cdot)$  sont contenues dans  $\gamma$ . Remarquons alors que  $\gamma$  est composée de 4 parties : l'équilibre  $A = (-4, 0)$ , la boucle  $\gamma_c$  à droite de l'équilibre, et les deux branches  $\gamma_-$  et  $\gamma_+$  à gauche; chacune de ces parties est stable par le flot de (4.9). Traitons séparément chaque partie.

- Si  $v = A$ ,  $X_v(\cdot) \equiv v$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$ .
- Si  $v \in \gamma_c$ , les valeurs  $X_v(t)$  sont contenues dans le compact  $\bar{\gamma}_c$ , la solution  $X_v(\cdot)$  est donc définie sur  $\mathbb{R}$ .
- Si  $v \in \gamma_+$  : comme  $x' > 0$ , pour  $t \geq 0$  le point  $X_v(t)$  est dans la portion de  $\gamma_+$  comprise entre  $v$  et l'équilibre : cette portion étant contenue dans un compact, la solution  $X_v(\cdot)$  a une durée de vie infinie pour les temps positifs. Elle est donc définie sur un intervalle de la forme  $]t_-, +\infty[$ , où  $t_- < 0$  pourrait être infini.
- Si  $v \in \gamma_-$  : comme  $x' < 0$ , pour  $t \leq 0$  le point  $X_v(t)$  est dans la portion de  $\gamma_-$  comprise entre  $v$  et l'équilibre : cette portion étant contenue dans un compact, la solution  $X_v(\cdot)$  a une durée de vie infinie pour les temps positifs. Elle est donc définie sur un intervalle de la forme  $] -\infty, t_+[$ , où  $t_+ > 0$  (éventuellement infini).

*Remarque 4.8.* On peut en fait montrer que, pour  $v$  appartenant à  $\gamma_+$  (resp.  $\gamma_-$ ), la durée de vie dans les temps négatifs (resp. positifs) est finie. Supposons par exemple  $v \in \gamma_+$  (la preuve est la même sur  $\gamma_-$ ). On veut montrer que  $t_- > -\infty$ . En notant que  $x'/2y = 1$  ( $y$  ne s'annule pas sur  $\gamma_+$ ), on obtient

$$t_- = - \int_{t_-}^0 \frac{x'}{2y} dt.$$

Comme  $C(x, y) = 32$  le long de  $\gamma_+$  (il suffit de prendre la valeur de  $C$  en  $A$ ) et que  $y$  est positif, on a  $y = \sqrt{32 - x^3 - 6x^2}$ . D'autre part,  $x'$  étant positif sur  $\gamma_+$ , on peut faire le changement de variable  $t \rightarrow x$ , les valeurs de  $x$  étant comprises entre une valeur minimale  $x_{\min} \geq -\infty$  et  $v_x$ , la première coordonnée de  $v = (v_x, v_y)$ . Ainsi,

$$t_- = - \int_{t_-}^0 \frac{x'}{2\sqrt{32 - x^3 - 6x^2}} dt \geq - \int_{-\infty}^{v_x} \frac{dx}{2\sqrt{32 - x^3 - 6x^2}}.$$

Or la dernière intégrale ci-dessus est finie, comme le montre le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{v_x} \frac{dx}{2\sqrt{32 - x^3 - 6x^2}} &\leq \int_{-12}^{v_x} \frac{dx}{2\sqrt{32 - x^3 - 6x^2}} + \int_{-\infty}^{-12} \frac{dx}{2\sqrt{32 - x^3 - 6x^2}} \\ &< \int_{-12}^{v_x} \frac{dx}{2\sqrt{32 - x^3 - 6x^2}} + \int_{-\infty}^{-12} \frac{dx}{\sqrt{2}(-x)^{3/2}} < \infty. \end{aligned}$$

Le temps  $t_-$  est donc fini :  $t_- > -\infty$ .

**4.** Soit  $v \in \gamma$  et  $X_v(\cdot)$  la solution de (4.9) issue de  $v$ , dont toutes les valeurs sont contenues dans  $\gamma$ . Alors  $X_v(\cdot)$  est aussi la solution de (4.10) issue de  $v \in \gamma$  puisque  $C(X_v(t)) - 32 \equiv 0$ . On connaît donc son intervalle de définition grâce à la question précédente.

De plus, ceci montre que, pour tout  $v \in \gamma$ , l'orbite de  $v$  est contenue dans  $\gamma$ ; autrement dit,  $\gamma$  est égale à l'union des orbites de ses points. Considérons alors la solution  $X_v(\cdot)$  de (4.10) issue d'un point  $v \in \Omega$ . L'orbite correspondante ne peut couper  $\gamma$ , ce qui implique que toute valeur  $X_v(t)$  appartient à  $\Omega$ , et donc a fortiori au compact  $\overline{\Omega}$ . La solution  $X_v(\cdot)$  est ainsi définie sur tout  $\mathbb{R}$ .

**5.** Cette question se traite par un raisonnement similaire à celui de l'exercice 4.2, question 7.:  $A$  et 0 étant les seuls équilibres, on montre ainsi que chaque ligne de niveau de  $C$  dans  $\Omega$  est une orbite périodique et que chaque composante connexe d'une ligne de niveau hors de  $\overline{\Omega}$  est une orbite, de même que  $\gamma_c$ ,  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$ .

### Exercice 4.2 (Modèle prédateur-proie).

**Le modèle de Volterra.** Le premier modèle de type "prédateur-proie" a été proposé par le mathématicien italien Vito Volterra au début des années 1920. Le but de

ce modèle était d'expliquer le phénomène suivant, observé à l'époque par le bureau de la pêche italienne de Trieste : pendant la Première Guerre Mondiale, période où la pêche était très réduite, la proportion de requins et autres prédateurs impropres à la consommation qu'on attrapait était nettement supérieure à ce qu'elle était avant-guerre, et à ce qu'elle redevint ensuite.

Le modèle de Volterra est le suivant. Soit  $x(t)$  le nombre de proies (i.e. les poissons comestibles) et  $y(t)$  le nombre de prédateurs (requins et autres). On va écrire un système différentiel en faisant les hypothèses suivantes :

- la population des proies n'est limitée que par les prédateurs et en leur absence croît exponentiellement;
- la population des prédateurs est totalement dépendante des proies et en leur absence décroît exponentiellement.

En termes mathématiques, l'énoncé nous dit qu'en l'absence d'interactions entre proies et prédateurs, on a

$$x'(t) = ax(t), \quad y'(t) = -cy(t),$$

où  $a$  et  $c$  sont des constantes positives. D'autre part, chaque rencontre entre proie et prédateur est bonne pour le prédateur et mauvaise pour la proie. On peut supposer le nombre de rencontres proportionnel au produit  $x(t)y(t)$ . Ainsi, l'évolution avec interaction peut être décrite par le système

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) = -cy(t) + fx(t)y(t). \end{cases}$$

Si l'on connaît les constantes  $a, b, c, f$  et les populations à un instant  $t_0$ , ce système décrit l'évolution future de chaque population : est-ce qu'elles vont augmenter, ou diminuer? À quelle vitesse? Pourquoi la pêche influence-t-elle le nombre de prédateurs? Le but de l'exercice est de répondre à ces interrogations.

Considérons l'équation du modèle "prédateur-proie" de Volterra,

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + fxy. \end{cases} \quad (4.11)$$

1. Montrer que l'équation (4.11) ne peut pas induire de populations  $x(t)$  ou  $y(t)$  négatives.

2. Montrer qu'il existe une fonction de la forme  $V(x, y) = F(x) + G(y)$  sur  $]0, +\infty[^2$  qui est constante le long des solutions de (4.11).

La forme des courbes de niveau de  $V$ ,

$$\{(x, y) \in ]0, +\infty[^2 : V(x, y) = \text{Const.}\},$$

est donnée figure 4.5 (avec  $c/f = 1$ ,  $a/b = 2$ ).

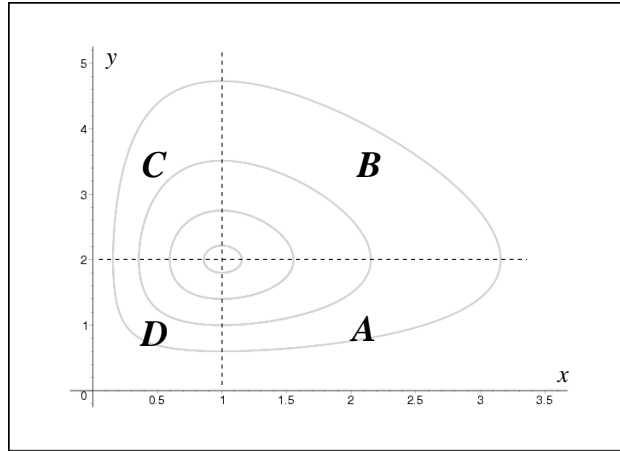


Fig. 4.5. Lignes de niveau de  $V(x, y)$

3. En déduire que l'équation est complète sur  $]0, +\infty[^2$ .
4. Soit  $(x_0, y_0)$  un point de la région A. Montrer que la solution de (4.11) issue de  $(x_0, y_0)$  entre dans la région B au bout d'un temps fini.
5. Montrer que toute solution  $z(\cdot) = ((x(\cdot), y(\cdot)))$  de l'équation différentielle (4.11) dans  $]0, +\infty[^2$  possède un point double, c'est-à-dire qu'il existe  $t_1 \neq t_2$  tels que  $z(t_1) = z(t_2)$ .
6. En déduire que toute solution dans  $]0, +\infty[^2$  est périodique et dessiner le portrait de phase.
7. Montrer le résultat général suivant.  
*Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteur et  $x(\cdot)$  une solution de  $x' = f(x)$  définie sur  $[0, +\infty[$  ayant une limite  $x_\infty \in \Omega$  en  $+\infty$ . Alors  $x_\infty$  est un équilibre (i.e.  $f(x_\infty) = 0$ ).*  
 Comment utiliser ce résultat pour montrer directement, sans utiliser le raisonnement des questions 4. et 5., que les solutions sont périodiques?
8. Vérifier que  $c/f$  est la population moyenne de proies et que  $a/b$  est la population moyenne de prédateurs (on calculera la moyenne sur une période). Expliquer l'influence de la pêche sur les deux populations.

#### Corrigé de l'exercice 4.2.

On notera  $g(x, y) = ((a - by)x, (fx - c)y)$  le champ de vecteurs défini par l'équation (4.11).

1. Remarquons que les demi-droites  $Ox^+ = \{x > 0, y = 0\}$  et  $Oy^+ = \{x = 0, y > 0\}$ , ainsi que l'origine, sont des orbites de l'équation différentielle. En effet, sur

$Ox^+$ , le champ de vecteurs vaut  $g(x, 0) = (ax, 0)$ . Il est donc facile de vérifier que

$$(x, y)(t) = (x_0 e^{at}, 0)$$

est la solution issue d'un point  $(x_0, 0) \in Ox^+$  en  $t = 0$ . Cette solution est définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et décrit tout  $Ox^+$ , c'est-à-dire que  $Ox^+$  est l'orbite de  $(x_0, 0)$ . De même, la solution issue d'un point  $(0, y_0) \in Oy^+$  est

$$(x, y)(t) = (0, y_0 e^{-ct}),$$

ce qui implique que  $Oy^+$  est l'orbite de  $(0, y_0)$ .

Puisque deux orbites ne peuvent pas se couper, l'orbite d'un point du quadrant positif  $]0, +\infty[^2$  ne peut pas en sortir. Autrement dit, si les populations  $x(t)$  et  $y(t)$  sont positives en un instant  $t$  donné, les fonctions  $x(\cdot)$  et  $y(\cdot)$  restent positives sur tout leur ensemble de définition.

**2.** On cherche une fonction  $V(x, y) = F(x) + G(y)$  constante sur les solutions de (4.11) dans  $]0, +\infty[^2$ , c'est-à-dire une fonction telle que

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = F'(x(t))x'(t) + G'(y(t))y'(t) = 0.$$

Or une simple combinaison des deux lignes de l'équation différentielle montre qu'une solution  $(x, y)(\cdot)$  dans  $]0, +\infty[^2$  vérifie

$$\frac{fx(t) - c}{x(t)}x'(t) + \frac{by(t) - a}{y(t)}y'(t) = 0.$$

Il suffit donc de choisir  $F$  et  $G$  tels que

$$F'(x) = f - \frac{c}{x}, \quad \text{et} \quad G'(y) = b - \frac{a}{y},$$

soit par exemple,

$$V(x, y) = (fx - c \log x) + (by - a \log y)$$

(on peut ajouter une constante quelconque à cette fonction).

**3.** Soit  $z(\cdot) = (x, y)(\cdot)$  une solution maximale de l'équation (4.11) dans  $]0, +\infty[^2$ . Puisque  $V$  est constante le long de  $z(\cdot)$ , cette solution est incluse dans la ligne de niveau  $\{V(x, y) = V(z(t_0))\}$ , où  $t_0$  est un point quelconque de l'intervalle de définition de  $z(\cdot)$ . Les lignes de niveau de  $V$  étant compactes, la solution  $z(\cdot)$  est contenue dans un compact, donc définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Ainsi l'équation est complète sur  $]0, +\infty[^2$ .



4. La région  $A$  est l'ensemble ouvert des  $(x, y) \in ]0, +\infty[^2$  tels que  $x > c/f$  et  $y < a/b$ . De même,  $B, C, D$  sont les ensembles ouverts de  $]0, +\infty[^2$  tels que, respectivement,  $x > c/f$  et  $y > a/b$ ,  $x < c/f$  et  $y > a/b$ ,  $x < c/f$  et  $y < a/b$ .

Soit  $z_0 = (x_0, y_0)$  un point de  $A$ . On considère la solution maximale  $z(\cdot)$  de l'équation vérifiant  $z(0) = z_0$ , et l'intervalle maximal  $J = [0, \tau[$  sur lequel  $z(t)$  appartient à  $A$  ( $\tau$  pouvant être égal à  $+\infty$ ). Remarquons déjà que, pour  $t \in J$ ,  $x'(t)$  et  $y'(t)$  sont positives, donc  $x(\cdot)$  et  $y(\cdot)$  sont croissantes sur  $J$ .

De plus, pour  $t \in J$ ,

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = fx(t) - c \geq fx_0 - c = r > 0.$$

Puisque  $y'/y = (\log y)'$ , ceci implique

$$\frac{a}{b} > y(t) \geq y_0 e^{rt}, \quad \forall t \in J.$$

En conséquence  $\tau$  doit être fini. Comme l'équation est complète,  $z(\tau)$  existe et vérifie forcément  $y(\tau) = a/b$ . Comme de plus  $y'(\tau) > 0$ ,  $z(t)$  appartient à la région  $B$  pour  $t > \tau$  suffisamment petit. Ainsi  $z(\cdot)$  entre dans la région  $B$  au bout d'un temps fini  $\tau$ .

5. Considérons à nouveau une solution maximale  $z(\cdot)$  de condition initiale  $z(0) \in A$ . On a vu à la question précédente que cette solution doit entrer dans  $B$  en temps  $\tau > 0$  fini. Un raisonnement semblable (sur  $x$  cette fois-ci) montre que  $z(\cdot)$  doit ensuite sortir de  $B$  pour entrer dans  $C$  à l'instant  $\tau_C > \tau$ , puis (raisonnement sur  $y$ ) sortir de  $C$  pour entrer dans  $D$  à l'instant  $\tau_D > \tau_C$ , (raisonnement sur  $x$ ) sortir de  $D$  pour entrer dans  $A$  à l'instant  $\tau_A > \tau_D$ , et à nouveau sortir de  $A$  pour entrer dans  $B$  à l'instant  $\tau_B > \tau_A$ .

D'autre part, l'orbite décrite par cette solution  $z(\cdot)$  est contenue dans la ligne de niveau  $\{V(x, y) = V(z(0))\}$ , qui intersecte en un unique point la demi-droite séparant les régions  $A$  et  $B$ . Ce point est donc égal à  $z(\tau)$ , mais aussi à  $z(\tau_B)$ . Comme  $\tau_B > \tau$ , la solution  $z(\cdot)$  a bien un point double.

6. C'est un fait général : dès qu'une solution  $z(\cdot)$  présente un point double,  $z(t_1) = z(t_2)$  pour  $t_1 \neq t_2$ , elle est périodique. En effet, en écrivant en fonction du flot  $z(t) = \phi_t(z(0))$ , on a

$$\begin{aligned} z(t) &= \phi_{t-t_1}(z(t_1)) = \phi_{t-t_1}(z(t_2)) = \phi_{t-t_1}(\phi_{t_2}(z(0))) \\ &= \phi_{t+t_2-t_1}(z(0)) = z(t+t_2-t_1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $z(\cdot)$  est périodique et que sa période  $T$  divise  $t_2 - t_1$  :  $kT = t_2 - t_1$ , pour  $k$  entier.

Le portrait de phase dans  $]0, +\infty[^2$  est simple à dessiner : les orbites sont exactement les lignes de niveau de  $V$ , représentées dans la figure 4.5, parcourues dans le sens trigonométrique. Noter que le point  $(c/f, a/b)$  est lui-même une orbite (c'est un point d'équilibre).

7. En posant  $x(s) = \phi_s(x(0))$ , la solution issue de  $x_\infty$  est

$$\phi_t(x_\infty) = \phi_t\left(\lim_{s \rightarrow \infty} \phi_s(x(0))\right).$$

L'application  $\phi_t$  étant continue, on obtient

$$\phi_t(x_\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} \phi_t \circ \phi_s(x(0)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \phi_{t+s}(x(0)) = x_\infty,$$

ce qui implique que  $x_\infty$  est un équilibre.

Considérons alors une solution maximale  $z_v(\cdot)$  de condition initiale  $z_v(0) = v$  différente de l'équilibre  $(c/f, a/b)$ . Cette solution est contenue dans la courbe de niveau  $C = \{z : V(z) = V(v)\}$ , que l'on paramètre par son abscisse curviligne :  $C = \{c(s) : s \in [0, L]\}$ , avec  $c(0) = c(L) = v$ . L'abscisse curviligne d'un point  $z_v(t)$  est clairement monotone en fonction de  $t$ , on peut donc la supposer croissante. Supposons par l'absurde que  $z_v$  n'est pas périodique (donc pas de points doubles) : ceci implique en particulier que le supremum des abscisses curvilignes  $s$  atteintes sur  $z_v(]0, +\infty[)$  est  $s_\infty < L$ . Les abscisses étant croissantes, le point  $c(s_\infty)$  est la limite de  $z_v(t)$  quand  $t \rightarrow \infty$ , et donc un équilibre. Comme  $C$  ne contient pas d'équilibre, on a une contradiction.

8. Soit  $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$  une solution de période  $T$ . La population moyenne de proies est

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{f} \frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{c}{f} \right) dt = \frac{1}{T} \left( \frac{1}{f} \log \left( \frac{y(T)}{y(0)} \right) + T \frac{c}{f} \right) = \frac{c}{f},$$

et la population moyenne de prédateurs est

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( -\frac{1}{b} \frac{x'(t)}{x(t)} + \frac{a}{b} \right) dt = \frac{a}{b}.$$

Notons que le fait que ces valeurs moyennes ne dépendent pas de la solution est une propriété extrêmement particulière de cette équation.

L'effet de la pêche est de prélever une certaine proportion de chacune des espèces. Dans le système différentiel, ceci revient à retrancher  $\varepsilon x$  à  $x'$  et  $\eta y$  à  $y'$  ( $\varepsilon, \eta > 0$ ), c'est-à-dire que l'équation devient :

$$\begin{cases} x'(t) = (a - \varepsilon)x(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) = -(c + \eta)y(t) + fx(t)y(t). \end{cases}$$

Les coordonnées du nouveau point d'équilibre (c'est-à-dire les nouvelles populations moyennes) sont

$$\bar{x} = \frac{c + \eta}{f} > \frac{c}{f} \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{a - \varepsilon}{b} < \frac{a}{b}.$$

Ce point d'équilibre est donc situé plus bas et plus à droite que l'ancien, d'où ce résultat étonnant : la pêche tend à augmenter le nombre moyen de poissons comestibles!

### Exercice 4.3 (Modèle de la grippe).

**Modèle de la grippe.** Afin de modéliser la propagation d'une épidémie (typiquement une épidémie de grippe) au sein d'une population, on introduit les trois grandeurs suivantes :

- $x(t)$  est le nombre d'individus qui à l'instant  $t$  n'ont pas contracté la maladie;
- $y(t)$  est le nombre d'individus qui à l'instant  $t$  ont contracté la maladie et sont contagieux;
- $z(t)$  est le nombre d'individus qui à l'instant  $t$  ont contracté la maladie et ne sont plus contagieux.

L'étude des épidémies au cours du temps permet de mettre en évidence deux caractéristiques de la maladie considérée : la capacité de contagion  $b$ , qui représente la capacité que possède la maladie de contaminer de nouveaux malades par unité de temps; et la fréquence d'incubation  $g = 1/\tau$ , où  $\tau$  représente la durée moyenne pendant laquelle un individu est contagieux. Ces deux paramètres  $b$  et  $g$  sont supposés constants pour une épidémie donnée.

En présence de la maladie et pendant une période caractéristique  $\Delta t$ , la quantité  $x(t)$  est diminuée du nombre de nouveaux malades. On a donc

$$\Delta x = -b xy \Delta t.$$

La quantité  $z(t)$  est augmentée du nombre de nouveaux guéris,

$$\Delta z = +g y \Delta t.$$

La quantité  $y(t)$  varie quant à elle en fonction de la différence entre le nombre de nouveaux malades et de nouveaux guéris,

$$\Delta y = b xy \Delta t - g y \Delta t,$$

la population totale  $N = x(t) + y(t) + z(t)$  restant constante. En supposant que ces relations peuvent être considérées entre des variations infinitésimales, les trois fonctions  $x, y$  et  $z$  de la variable  $t$  sont donc solutions de l'équation différentielle (S) ci-dessous.

Le but de l'exercice est d'analyser le comportement de l'épidémie afin d'en déduire la stratégie de vaccination la plus adaptée.

Considérons le modèle de propagation d'épidémie suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x' = -b xy, & (S1) \\ y' = b xy - g y, & (S2) \\ z' = g y, & (S3) \end{cases}$$

où  $b, g$  sont des constantes positives.

**1.** Montrer que le modèle (S) ne peut pas induire de populations  $x, y$  ou  $z$  négatives.

Dans le modèle (S), la population totale est supposée constante :  $x(t) + y(t) + z(t) = N$ . Comme de plus l'équation différentielle ne dépend pas de  $z$ , on se restreint à l'étude de l'équation en  $(x, y)$  donnée par (S1) – (S2), la dernière variable étant obtenue par  $z(t) = N - x(t) - y(t)$ .

**2.** Donner le sens de variation de la fonction  $x(t)$  et montrer que la courbe  $(x(t), y(t))$  est contenue dans le graphe d'une fonction  $y = \phi(x)$  que l'on calculera.

**3.** Montrer que l'orbite de la solution  $(x(\cdot), y(\cdot))$  est exactement le graphe de  $\phi(x)$ , pour  $x > 0$  (on utilisera le résultat de la question **7.** de l'exercice 4.2).

**4.** Tracer le portrait de phase de l'équation différentielle (S1) – (S2).

**5.** Supposons  $g/b < N$  et considérons une condition initiale  $x(t_0) \in ]g/b, N[$  et  $y(t_0) \ll 1$ . Décrire le comportement de  $x(t)$  et  $y(t)$ . Qu'en conclure sur les stratégies de vaccinations?

### Corrigé de l'exercice 4.3.

**1.** Le raisonnement est similaire à celui de l'exercice 4.2, question **1.**. Notons  $f(x, y, z)$  le champ de vecteurs défini par (S) et considérons une solution  $(x, y, z)(t)$  de  $f$  dont chaque composante à l'instant initial,  $x(0), y(0)$  et  $z(0)$ , est positive.

Supposons que  $y$  change de signe. Il existe alors  $\tilde{t} > 0$  tel que  $y(\tilde{t}) = 0$ . Or tout point  $(x, 0, z)$  est un équilibre de  $f$  : les seules solutions qui passent par un tel point sont les solutions constantes. La population  $y$  ne peut donc changer de signe. Ceci implique par ailleurs que  $z$  est croissant et reste donc également positif pour  $t \geq 0$ . Enfin, supposons que  $x$  change de signe, c'est-à-dire qu'il existe  $\tilde{t} > 0$  tel que  $x(\tilde{t}) = 0$ . Or en un point  $(0, y_0, z_0)$  passe la trajectoire :

$$x = 0, \quad y = y_0 e^{-gt}, \quad z = z_0 + g \int_0^t y.$$

L'unique orbite passant par  $(x(\tilde{t}) = 0, y(\tilde{t}), z(\tilde{t}))$  est donc contenue dans le plan  $\{x = 0\}$ , ce qui contredit  $x(0) > 0$ . La population  $x$  ne peut donc changer de signe.

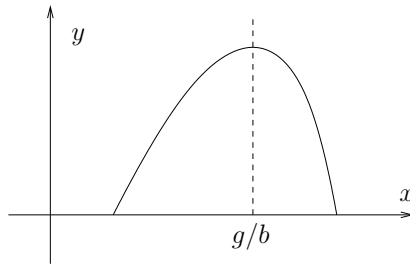
**2.** Sur un intervalle de temps où  $x(t)$  et  $y(t)$  sont non nuls (et positifs), on a  $x'(t) < 0$ . En conséquence (théorème d'inversion locale), le long d'une telle solution  $(x, y)(t)$ , la fonction  $t \mapsto x(t)$  est inversible et on peut paramétrer la solution par  $x : y(t) = y(t(x)) = \phi(x)$ . Autrement dit, la courbe  $(x(t), y(t))$  est contenue dans le graphe de  $\phi$ . Cette fonction  $\phi$  vérifie, en  $x = x(t)$ ,

$$\frac{d\phi}{dx}(x) = \frac{dy}{dt}(t) \frac{dt}{dx}(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -1 + \frac{g}{bx}.$$

En intégrant à partir d'un point  $(x(t_0), y(t_0))$ , on trouve

$$\phi(x) = x(t_0) - x + \frac{g}{b} \log\left(\frac{x}{x(t_0)}\right) + y(t_0).$$

**3.** On vient de voir qu'une solution  $X(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$  de  $(S1) - (S2)$  dans le quadrant  $]0, +\infty[^2$  est contenue dans le graphe d'une fonction  $\phi$  dont la forme est donnée à la figure 4.6. De plus, cette solution ne peut sortir du quadrant  $]0, +\infty[^2$



**Fig. 4.6.** Graphe de  $\phi(x)$

car tout point de l'axe  $Ox$  est un équilibre (une solution ne peut donc pas “passer” par un tel point). Donc  $X(\cdot)$  est contenue dans un compact (le graphe de  $\phi$ ), ce qui implique qu'elle est définie pour tout  $t$ .

D'autre part, le long de cette solution,  $x(t)$  étant monotone, minorée et majorée, elle admet des limites quand  $t \rightarrow \pm\infty$ ; c'est donc aussi le cas de  $y(t) = \phi(x(t))$  et par conséquent de  $X(t)$ . Or, si  $X(t)$  a une limite, c'est un équilibre, d'après l'exercice 4.2, question **7.** Les seuls équilibres de l'équation étant les points de l'axe  $Ox$ , on en conclut que l'orbite de  $X(\cdot)$  est exactement le graphe de  $\phi(x)$ , pour  $x > 0$ .

**4.** Le portrait de phase est composé des graphes de toutes les fonctions  $\phi(x)$  parcourus de la droite vers la gauche (car  $x'$  est négatif), comme indiqué figure 4.7.

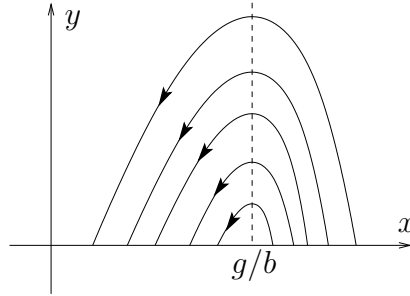


Fig. 4.7. Portrait de phase

5. La condition initiale  $(x(t_0), y(t_0))$  choisie est pratiquement à l'intersection du graphe de  $\phi$  et de l'axe  $Ox$ , à droite de  $g/b$ . Au cours du temps,  $x(t)$  va donc décroître et tendre vers sa valeur minimale (l'autre intersection du graphe avec  $Ox$ ),  $y(t)$  va croître jusqu'au moment où  $x(t)$  vaut  $g/b$  et décroître ensuite pour tendre vers 0.

La stratégie de vaccination est donc la suivante :

- mesurer  $x(t_0)$ ;
- si  $x(t_0) < g/b$ , on ne fait rien : le pic de l'épidémie est passé;
- si  $x(t_0) > g/b$ , on vaccine : cela a pour effet de diminuer  $b$ , donc d'élever le seuil  $g/b$ , qui devient alors (on l'espère) plus grand que  $x(t_0)$ ; on est passé dans la phase descendante de l'épidémie.

#### Exercice 4.4 (Redressement d'un champ de vecteurs).

On appelle *changement de coordonnées* sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  une application

$$\begin{aligned} \psi : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^n, & \Omega' \text{ ouvert,} \\ x &\mapsto y = \psi(x), \end{aligned}$$

qui est bijective,  $C^1$  et d'inverse  $C^1$  ( $\psi$  est donc un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\Omega$  dans  $\Omega'$ ). En particulier,  $\psi^{-1}$  est un changement de coordonnées sur  $\Omega'$ .

Considérons un champ de vecteurs  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f(0) \neq 0$ . On peut donc trouver une base de  $\mathbb{R}^n$  de la forme  $f(0), v_2, \dots, v_n$  et on définit

$$\varphi : y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto \phi_{y_1} \left( \sum_{i=2}^n y_i v_i \right),$$

où  $\phi_t$  est le flot de  $f$ .

1. Calculer la différentielle de  $\varphi$  en 0.

2. Montrer que  $\psi = \varphi^{-1}$  est un changement de coordonnées sur un voisinage  $\Omega$  de 0. On note  $y = \psi(x)$ .

3. Soit  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , une trajectoire de  $f$  contenue dans  $\Omega$ . Écrire  $y(t) = \psi(x(t))$  en fonction des coordonnées  $y^0 = \psi(x(0))$  de  $x(0)$ .

4. Montrer que le changement de coordonnées  $\psi$  transforme l'équation  $\dot{x} = f(x)$  sur  $\Omega$  en l'équation  $\dot{y} = e_1$  sur  $\Omega' = \psi(\Omega)$  ( $e_1$  étant le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ).

#### Corrigé de l'exercice 4.4.

1. La différentielle de  $\phi$  se calcule à partir des dérivées partielles :  $D\varphi(0) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(0) \cdots \frac{\partial \varphi}{\partial y_n}(0) \right)$ . Or

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(0) = \frac{\partial}{\partial y_1}(\phi_{y_1}(0)) \Big|_{y_1=0} = f(0),$$

et, pour  $i = 2, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(0) = \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \phi_0 \left( \sum_{i=2}^n y_i v_i \right) \right) \Big|_{y=0} = v_i,$$

donc  $D\varphi(0) = (f(0) \ v_2 \cdots v_n)$ .

2. Il suffit d'appliquer le théorème d'inversion locale à  $\varphi$  en 0, toutes les hypothèses en sont vérifiées.

3. Soient  $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$  les coordonnées de  $x(0)$ , *i.e.*  $x(0) = \varphi(y^0)$ . On a

$$x(t) = \phi_t(x(0)) = \phi_t(\varphi(y^0)) = \phi_t \left( \phi_{y_1^0} \left( \sum_{i=2}^n y_i^0 v_i \right) \right).$$

D'après la formule du flot, ceci implique  $x(t) = \phi_{y_1^0+t}(\sum_{i=2}^n y_i^0 v_i)$  et donc  $y(t) = (y_1^0 + t, y_2^0, \dots, y_n^0)$ .

4. Puisque  $y(t) = (y_1^0 + t, y_2^0, \dots, y_n^0)$ , on a  $\dot{y}(t) = (1, 0, \dots, 0) = e_1$  : le changement de coordonnées  $\psi$  transforme donc les solutions de l'équation  $\dot{x} = f(x)$  en celles de l'équation  $\dot{y} = e_1$ .

#### Exercice 4.5 (Méthode des caractéristiques).

Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteur complet de flot  $\phi_t$ .

1. Montrer que  $D\phi_t(x) \cdot F(x) = F(\phi_t(x))$ .

Considérons une application  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .

**2.** Montrer que la fonction  $g(t, x) = u(\phi_t(x))$  est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = D_x f(t, x) \cdot F(x), \quad f(0, x) = u(x). \quad (4.12)$$

**3.** Étudions maintenant l'unicité des solutions de (4.12). On considère donc une solution  $f$  de cette équation.

- Soit  $\bar{F}$  le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  défini par  $\bar{F}(t, x) = (-1, F(x))$ . Montrer que, si  $y(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  est solution de l'équation différentielle  $y'(s) = \bar{F}(y(s))$ , alors  $f \circ y$  est une fonction constante.
- Montrer que toute solution maximale de  $y' = \bar{F}(y)$  coupe l'hyperplan  $t = 0$ .
- En déduire que  $f = g$  et conclure sur l'unicité des solutions de (4.12).

**4.** Dans le cas  $n = 2$ , résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x) - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(t, x) \quad (4.13)$$

en fonction de la condition aux limites  $f(0, x) = u(x)$ .

### Corrigé de l'exercice 4.5.

**1.** Dérivons par rapport à  $s$  l'identité  $\phi_{t+s}(x) = \phi_t \circ \phi_s(x)$ . On sait que

$$\frac{d}{ds}(\phi_{t+s}(x)) = F(\phi_{t+s}(x)),$$

alors que

$$\frac{d}{ds}(\phi_t \circ \phi_s(x)) = D\phi_t(\phi_s(x)) \cdot F(\phi_s(x)).$$

On obtient donc

$$F(\phi_{t+s}(x)) = D\phi_t(\phi_s(x)) \cdot F(\phi_s(x)),$$

et il suffit de prendre  $s = 0$  pour conclure.

**2.** Rappelons d'abord que  $\phi_0(x) = x$ , ce qui entraîne  $g(0, x) = u(x)$ . Calculons maintenant la dérivée de  $g$  par rapport à  $t$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = Du(\phi_t(x)) \cdot F(\phi_t(x)).$$

Par ailleurs, le membre de droite de l'équation aux dérivées partielles est

$$D_x g(t, x) \cdot F(x) = Du(\phi_t(x)) \cdot (D\phi_t(x) \cdot F(x)) = Du(\phi_t(x)) \cdot F(\phi_t(x)),$$

d'après la question précédente. Ceci montre bien que  $g$  est solution de (4.12).



3. a) Il suffit de montrer que  $\frac{d}{ds}(f \circ y)(s) = 0$ . Calculons-le :

$$\frac{d}{ds}(f \circ y)(s) = Df(y(s)) \cdot y'(s) = Df(y(s)) \cdot \bar{F}(y(s)).$$

Or  $Df(t, x)$  est la matrice ligne à  $(n + 1)$  éléments qui s'écrit par blocs

$$Df(t, x) = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \quad D_x f(t, x) \right),$$

alors que  $\bar{F}(t, x)$  est le vecteur colonne  $(-1, F(x))$ . Posons  $y(s) = (t(s), x(s))$ . En multipliant les deux matrices précédentes, on obtient

$$\frac{d}{ds}(f \circ y)(s) = -\frac{\partial f}{\partial t}(y(s)) + D_x f(y(s)) \cdot F(x(s)) = 0,$$

puisque  $f$  est solution de l'équation aux dérivées partielles.

- b) Puisque le champ  $F$  est complet, son flot  $\phi_t(x)$  est défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Le flot  $\bar{\phi}$  de  $\bar{F}(t, x)$  étant donné par

$$\bar{\phi}_s(t, x) = (-s + t, \phi_s(x)),$$

il est défini pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , c'est-à-dire que  $\bar{F}$  est complet et que toute solution maximale  $y(s)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  entier. Or une telle solution  $y(s) = (t, x)(s)$  vérifie  $t(s) = -s + t(0)$  : la valeur  $y(t(0))$  est donc définie et appartient à l'hyperplan  $\{t = 0\}$ .

- c) Prenons  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  et montrons que  $f(t_0, x_0) = g(t_0, x_0)$ . Soit  $y(\cdot)$  la solution de  $y'(s) = \bar{F}(y(s))$  de condition initiale  $y(0) = (t_0, x_0)$ . D'après la question précédente,  $y(t_0) = (0, x(t_0))$ .

D'autre part, d'après la question a),  $f$  et  $g$ , et donc  $f - g$ , sont constantes le long de  $y(\cdot)$ , ce qui implique  $(f - g)(y(0)) = (f - g)(y(t_0))$ , ou encore

$$f(t_0, x_0) - g(t_0, x_0) = f(0, x(t_0)) - g(0, x(t_0)) = 0,$$

car  $f(0, x) = g(0, x) = u(x)$ . Ainsi  $f = g$ , c'est-à-dire que  $g$  est l'unique solution de (4.12).

4. Pour mettre l'équation (4.13) sous la forme (4.12), il suffit de prendre pour  $F$  le champ de vecteurs linéaire

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Son flot est l'exponentielle de la matrice ci-dessus, c'est-à-dire (voir chapitre 2),

$$\phi_t(x) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} x.$$

La solution de (4.13) satisfaisant  $g(0, x) = u(x)$  est donc

$$g(t, x) = u(x_1 \cos t + x_2 \sin t, -x_1 \sin t + x_2 \cos t).$$

**Exercice 4.6 (Application de Poincaré).**

Considérons l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1 (1 - (x_1^2 + x_2^2)), \\ x_2' = x_1 + x_2 (1 - (x_1^2 + x_2^2)). \end{cases} \quad (4.14)$$

1. Montrer que  $\bar{x}(t) = (\cos t, \sin t)$  est une solution  $2\pi$ -périodique de ce système.
2. Soit  $R(t, s)$  la résolvante de l'équation linéarisée de (4.14) autour de la solution  $\bar{x}(\cdot)$ . Montrer que  $\bar{x}'(0)$  est un vecteur propre de la matrice  $R(2\pi, 0)$  associé à la valeur propre 1.
3. Écrire l'équation linéarisée de (4.14) autour de  $\bar{x}(\cdot)$ .
4. Montrer que  $\det R(t, 0)$  est solution d'une équation différentielle; en déduire  $\det R(2\pi, 0)$ .
5. Calculer les valeurs propres de la matrice  $R(2\pi, 0)$  et montrer qu'elle est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .
6. En déduire le comportement asymptotique des solutions de (4.14) dont les conditions initiales  $x(0)$  sont proches du cercle unité.

**Corrigé de l'exercice 4.6.**

1. Évident, il suffit de remplacer dans l'équation.
2. Soit  $\phi_t$  le flot de l'équation différentielle (4.14). Puisque  $\bar{x}(\cdot)$  est définie sur  $[0, 2\pi]$  (sur tout  $\mathbb{R}$  en fait), l'application  $\phi_{2\pi}$  est définie sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{x}(0)$  et  $D\phi_{2\pi}(\bar{x}(0)) = R(2\pi, 0)$ .  
Or, pour  $t$  suffisamment petit,  $\bar{x}(t)$  appartient à  $\mathcal{V}$  et  $\bar{x}(t) = \bar{x}(t + 2\pi) = \phi_{2\pi}(\bar{x}(t))$ , puisque la solution est  $2\pi$ -périodique. En dérivant cette égalité en  $t = 0$ , on obtient

$$\bar{x}'(0) = \frac{d}{dt} \phi_{2\pi}(\bar{x}(t))|_{t=0} = D\phi_{2\pi}(\bar{x}(0)) \cdot \bar{x}'(0),$$

c'est-à-dire  $R(2\pi, 0)\bar{x}'(0) = \bar{x}'(0)$ . Ainsi  $R(2\pi, 0)$  admet 1 pour valeur propre, un vecteur propre associé étant  $\bar{x}'(0)$ .

3. Notons  $f(x)$  le champ de vecteur définissant l'équation différentielle (4.14). L'équation linéarisée est l'équation linéaire  $y'(t) = A(t)y(t)$  où  $A(t) = Df(\bar{x}(t))$ . Calculons d'abord  $Df$  :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1 - (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1^2 & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2 & 1 - (x_1^2 + x_2^2) - 2x_2^2 \end{pmatrix},$$

et donc

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2 \cos^2 t & -1 - 2 \cos t \sin t \\ 1 - 2 \cos t \sin t & -2 \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

4. Il suffit d'appliquer la proposition 3.3. Ici la trace de  $A(t)$  est égale à  $-2$ . On a donc

$$\det R(2\pi, 0) = \exp\left(\int_0^{2\pi} \operatorname{tr} A(t) dt\right) = e^{-4\pi}.$$

5. Connaissant une valeur propre de  $R(2\pi, 0)$ , 1, et son déterminant, on en déduit la valeur de l'autre valeur propre :  $e^{-4\pi}$ . Les deux valeurs propres étant réelles et distinctes,  $R(2\pi, 0)$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$ .

6. Intuitivement, la question peut se comprendre de la façon suivante. Soit  $\bar{x}(0) + \delta v$  une condition initiale proche de  $\bar{x}(0)$ . La solution de (4.14) issue de cette condition initiale se trouve en un point  $\phi_{2\pi}(\bar{x}(0) + \delta v)$  proche de  $\bar{x}(0)$  "après un tour", *i.e.* au bout d'un temps  $2\pi$ . Au bout de  $k$  tours, la solution se trouve au point  $\phi_{2k\pi}(\bar{x}(0) + \delta v)$ . La question est : s'est-on rapproché ou éloigné de  $\bar{x}(0)$ ?

Remarquons que  $D\phi_{2k\pi}(\bar{x}(0)) = R(2\pi, 0)^k$ , ce qui entraîne

$$\phi_{2k\pi}(\bar{x}(0) + \delta v) = R(2\pi, 0)^k \delta v + o(\|\delta v\|). \quad (4.15)$$

Or  $R(2\pi, 0)$  est  $e^{-4\pi}$ -contractante dans la direction transverse à l'orbite de  $\bar{x}(\cdot)$  :  $R(2\pi, 0)^k$  est donc  $e^{-4k\pi}$ -contractante dans cette direction, ce qui implique que le vecteur  $R(2\pi, 0)^k \delta v$  tend à être tangent à  $\bar{x}(t)$ . Ainsi une solution issue d'un point voisin de  $\bar{x}(0)$  tend à se rapprocher de l'orbite de  $\bar{x}(\cdot)$ .

Le raisonnement précédent n'est cependant pas rigoureux : dans le développement limité (4.15), le terme  $o(\|\delta v\|)$  dépend de  $k$ . Pour obtenir une vraie preuve, on va plutôt utiliser l'application premier retour de Poincaré (voir la proposition 4.6). Soit  $v$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $e^{-4\pi}$ . On a vu à la question 2 que  $\bar{x}'(0)$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 :  $v$  et  $\bar{x}'(0)$  sont donc linéairement indépendants et l'hyperplan  $\Sigma = \bar{x}(0) + \mathbb{R}v$  est transverse à  $\bar{x}(\cdot)$  en  $\bar{x}(0)$ . Il existe alors un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{x}(0)$  et  $\eta : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $z \in \mathcal{V} \cap \Sigma$ , on a  $\phi_{2\pi+\eta(z)}(z) \in \Sigma$ .

L'application de premier retour de Poincaré  $G : \mathcal{V} \cap \Sigma \rightarrow \Sigma$  est définie par

$$G(z) = \phi_{2\pi+\eta(z)}(z).$$

Sa différentielle est  $DG(\bar{x}(0)) = D\phi_{2\pi}(\bar{x}(0))|_{\mathbb{R}v} = (e^{-4\pi})$ . Puisque  $e^{-4\pi} < 1$ ,  $G$  est contractante : il en résulte que toute solution issue d'une condition initiale dans  $\mathcal{V}$  est définie pour tout  $t \geq 0$  et se rapproche à chaque tour un peu plus de  $\bar{x}(0)$ . Autrement dit, les solutions proches du cercle unité "spiralent" vers lui.

#### Exercice 4.7 (non corrigé).

On s'intéresse à l'équation différentielle  $x' = f(x)$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par le champ de vecteurs

$$f(x) = Ag(A^T x),$$

où  $A$  est une matrice de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application  $C^1$  telle que  $g(0) = 0$  et  $Dg(x)$  est antisymétrique,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . On notera  $\phi_t$  le flot de  $x' = f(x)$ .

1. Calculer  $\phi_t(0)$ .
2. Calculer la différentielle  $Df(x)$  et montrer qu'elle est antisymétrique.
3. Soit  $R(t, s)$  la résolvante de l'équation linéarisée autour d'une solution  $x(\cdot)$  de l'équation différentielle. Montrer que  $\|R(t, s)\| = 1$ .
4. En déduire que  $\|\phi_t(x)\| \leq \|x\|$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

## Stabilité des équilibres

### 5.1 Équilibres et stabilité

Considérons l'équation différentielle autonome

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (5.1)$$

où le champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est supposé de classe  $C^1$ .

**Définition 5.1.** *On dit qu'un point  $x_0 \in \Omega$  est un équilibre de (5.1) si la fonction constante  $x(\cdot) \equiv x_0$  est solution de (5.1) ou, de façon équivalente, si  $f(x_0) = 0$  (vérifier que c'est bien équivalent!).*

Autrement dit,  $\phi_t(x_0) = x_0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , où  $\phi$  est le flot du champ de vecteurs  $f$  (l'intervalle maximal associé à  $x_0$  étant  $I_{x_0} = \mathbb{R}$ ). L'orbite de  $x_0$  est donc réduite à un point :  $\mathcal{O}_{x_0} = \{x_0\}$ .

Quand l'équation (5.1) modélise l'évolution d'un phénomène physique (mécanique, biologique, écologique, ...), un équilibre correspond bien à la notion habituelle « d'état d'équilibre » : si le système est dans l'état  $x_0$ , alors il y reste (et il y a toujours été). En pratique on sait cependant que seuls les états d'équilibre ayant certaines propriétés de stabilité sont significatifs.

**Définition 5.2.** *Nous dirons qu'un équilibre  $x_0$  est stable si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que*

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{et} \quad t > 0 \quad \implies \quad \|\phi_t(x) - x_0\| < \epsilon.$$

Ainsi, toute solution proche de  $x_0$  en reste proche.

*Remarque 5.1.* Toute solution dont la condition initiale est dans une boule  $B(x_0, \delta)$  reste dans la boule  $B(x_0, \epsilon)$ , et donc dans un compact de  $\Omega$ , pour  $t > 0$  (on suppose  $\epsilon$  suffisamment petit pour que  $\bar{B}(x_0, \epsilon) \subset \Omega$ ). D'après la proposition 4.2, ces solutions sont donc définies pour tout  $t > 0$ .

**Définition 5.3.** *Nous dirons qu'un équilibre  $x_0$  est asymptotiquement stable si il est stable et si il existe un voisinage  $V$  de  $x_0$  tel que, pour tout  $x \in V$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0.$$

Dans ce cas toute solution proche de l'équilibre en reste proche et en plus converge vers lui. Notons que le fait que toute solution issue d'un voisinage  $V$  converge vers  $x_0$  n'implique pas la stabilité de cet équilibre : il existe des systèmes possédant un équilibre non stable  $x_0$  mais dont toutes les trajectoires convergent vers  $X_0$ .

### Le cas linéaire

Considérons le cas particulier d'une équation différentielle autonome linéaire

$$x'(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

L'origine est toujours un équilibre de cette équation (mais il peut y en avoir d'autres : tout élément de  $\ker A$  est un équilibre). L'étude réalisée dans la section 2.4 permet de caractériser la stabilité de cet équilibre.

### Proposition 5.1.

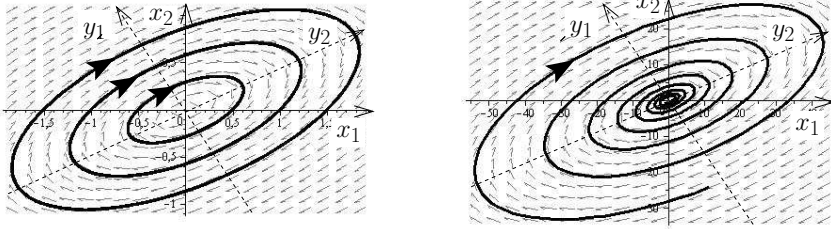
- *L'origine est un équilibre asymptotiquement stable de  $x' = Ax$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative, i.e.  $\mathbb{R}^n = E^s$ .*
- *Si  $A$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas un équilibre stable de  $x' = Ax$ .*

Ces deux propriétés sont importantes car, comme nous allons le voir dans la section suivante, elles se généralisent au cas non linéaire.

Notons que l'origine peut être un équilibre stable mais non asymptotiquement stable. C'est une situation que l'on rencontre quand  $A$  a des valeurs propres de partie réelle nulle, par exemple quand  $A$  est antisymétrique (voir proposition 3.4 et la discussion qui suit). On a représenté figure 5.1 des portraits de phase dans  $\mathbb{R}^2$  correspondant à une matrice antisymétrique (cas a) et une autre dont les valeurs propres ont une partie réelle  $< 0$  (cas b).

Remarquons enfin que l'on peut donner une condition nécessaire et suffisante de stabilité :

*l'origine est un équilibre stable de  $x' = Ax$  si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle négative ou nulle et si pour toute valeur propre de partie réelle nulle, les multiplicités algébrique et géométrique coïncident, (c'est-à-dire  $\mathbb{R}^n = E^s + E^c$  et  $A|_{E^c}$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$ ).*



Cas a. Équilibre stable mais non asymptotiquement stable

Cas b. Équilibre asymptotiquement stable

**Fig. 5.1.** Exemples de portraits de phase stables pour  $f(x) = Ax$  avec  $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ .

### Le cas affine

Considérons maintenant un champ de vecteurs affine  $f(x) = Ax + b$  sur  $\mathbb{R}^n$ , où  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice et  $b \in \mathbb{R}^n$  un vecteur. Un équilibre de l'équation

$$x'(t) = Ax(t) + b$$

est un point  $x_0$  qui vérifie  $Ax_0 + b = 0$  (noter qu'un tel point n'existe que si  $b \in \text{Im } A$ ). En remplaçant  $b$  par  $-Ax_0$ , on réécrit l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{d}{dt}(x(t) - x_0) = A(x(t) - x_0).$$

Ainsi la stabilité et la stabilité asymptotique d'un équilibre de l'équation affine  $x'(t) = Ax(t) + b$  sont équivalentes respectivement à celles de l'origine pour l'équation linéaire  $y'(t) = Ay(t)$ .

## 5.2 La stabilité par la linéarisation

Soit  $x_0$  un équilibre de l'équation différentielle (5.1). Nous allons montrer dans les deux théorèmes suivants que l'étude des valeurs propres de la matrice  $Df(x_0)$  permet généralement de caractériser la stabilité de l'équilibre.

**Théorème 5.1.** *Si toutes les valeurs propres de  $Df(x_0)$  sont de partie réelle strictement négative, alors  $x_0$  est un équilibre asymptotiquement stable.*

*Remarque 5.2.* Contrairement au cas des équations linéaires, la condition donnée dans ce théorème est suffisante mais pas nécessaire. Prenons par exemple l'équation  $y'(t) = -y^3(t)$  dans  $\mathbb{R}$ . L'équilibre 0 ne satisfait pas la condition du théorème puisque  $Df(0) = 0$ . En revanche c'est un équilibre asymptotiquement stable puisque la solution valant  $y_0 \neq 0$  en  $t = 0$  est

$$y(t) = \frac{\text{signe}(y_0)}{\sqrt{2t + \frac{1}{y_0^2}}}, \quad t \geq 0,$$

qui est décroissante et converge vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**\*Démonstration.** Pour simplifier, on se ramène par translation à  $x_0 = 0$ . D'après l'hypothèse, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $-\alpha$  est strictement supérieur à la partie réelle de toute valeur propre de  $Df(0)$ . D'après un résultat classique d'algèbre linéaire, il existe alors un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$  sur  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$\langle Df(0)x, x \rangle_\alpha \leq -\alpha \|x\|_\alpha^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $\|\cdot\|_\alpha$  est la norme associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$  (le résultat est clair quand  $Df(0)$  est diagonalisable, sinon il se montre en utilisant la décomposition de Jordan, voir [3, th. 1.4.3]).

Or, par définition de la différentielle,

$$\langle f(x), x \rangle_\alpha = \langle Df(0)x, x \rangle_\alpha + o(\|x\|_\alpha^2).$$

Ainsi, pour  $x$  suffisamment proche de 0, disons  $\|x\| < \delta$ , on obtient

$$\langle f(x), x \rangle_\alpha \leq -\frac{\alpha}{2} \|x\|_\alpha^2.$$

▷ Prenons maintenant un point  $v \neq 0$  vérifiant  $\|v\| < \delta$  et notons  $x(t) = \phi_t(v)$  la solution issue de  $v$ . On peut choisir un temps  $t_0 > 0$  suffisamment petit pour que  $\|x(t)\| < \delta$  pour tout  $t \in [0, t_0]$ . La fonction  $t \mapsto \|x(t)\|_\alpha$  est dérivable (car  $x(t) \neq 0 \forall t$ ), et

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|_\alpha = \frac{\langle x'(t), x(t) \rangle_\alpha}{\|x(t)\|_\alpha} = \frac{\langle f(x(t)), x(t) \rangle_\alpha}{\|x(t)\|_\alpha} \leq -\frac{\alpha}{2} \|x(t)\|_\alpha. \quad (5.2)$$

Ceci implique d'abord que  $\|x(t)\|_\alpha$  est décroissante :  $x(t)$  reste donc confinée dans le compact  $\|x\|_\alpha \leq \|v\|_\alpha$ , ce qui entraîne que  $x(\cdot)$  est définie pour tout  $t > 0$  (proposition 4.2). D'autre part, l'équation ci-dessus peut se réécrire

$$\frac{d}{dt} (\ln \|x(t)\|_\alpha) \leq -\frac{\alpha}{2},$$

ce qui implique, après intégration,

$$\|x(t)\|_\alpha \leq e^{-\frac{\alpha}{2}t} \|v\|_\alpha.$$

Finalement, on a montré que, si  $\|v\| < \delta$ , alors  $\phi_t(v)$  reste dans  $B_\alpha(0, \delta)$  (la boule de rayon  $\delta$  pour la norme  $\|\cdot\|_\alpha$ ) et tend vers 0, ce qui montre que 0 est un équilibre asymptotiquement stable.

□

En complément de cette condition suffisante de stabilité asymptotique, on dispose d'une condition nécessaire de stabilité, dont on trouvera la preuve dans [5] ou [6].



**Théorème 5.2.** *Si  $x_0$  est un équilibre stable, alors toutes les valeurs propres de  $Df(x_0)$  sont de partie réelle négative ou nulle.*

On utilisera généralement la contraposée de ce théorème : *si  $Df(x_0)$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'équilibre  $x_0$  n'est pas stable.*

*Remarque 5.3.* Dans le cas où  $n = 2$ , il est très pratique d'utiliser le déterminant et la trace de  $Df(x_0)$  pour caractériser le signe des parties réelles de ses valeurs propres (voir la remarque 2.6. Conjugué aux deux théorèmes précédents, cela donne les critères suivant, très simples à utiliser :

- si  $\det Df(x_0) < 0$ , ou  $\det Df(x_0) > 0$  et  $\text{tr } Df(x_0) > 0$ , alors l'équilibre  $x_0$  n'est pas stable;
- $\det Df(x_0) > 0$  et  $\text{tr } Df(x_0) < 0$ , alors l'équilibre  $x_0$  est asymptotiquement stable.

Il est important de noter que les réciproques des théorèmes 5.1 et 5.2 sont fausses, comme le montre l'exemple ci-dessous. La stabilité d'un équilibre n'est donc pas forcément déterminée par le linéarisé. Nous allons ensuite introduire une classe d'équilibres pour lesquels les réciproques des théorèmes 5.1 et 5.2 sont vérifiées.

*Exemple 5.1.* Considérons deux équations différentielles dans  $\mathbb{R}^2$ ,

$$x' = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad x' = g(x) = \begin{pmatrix} x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix},$$

où  $x = (x_1, x_2)$ . Ces deux équations ont pour unique équilibre 0. Leurs linéarisés en 0 sont égaux,

$$Df(0) = Dg(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et ont pour valeurs propres  $\pm i$ , dont la partie réelle est évidemment nulle! Cependant l'équilibre 0 est asymptotiquement stable dans le premier cas alors qu'il n'est pas stable dans le deuxième.

En effet, posons  $\rho(x) = x_1^2 + x_2^2$ . Si  $x(\cdot)$  est une solution de l'équation  $x' = f(x)$ , alors

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t)) = 2(x_1x_1' + x_2x_2') = -2\rho^2(x(t)).$$

Ainsi  $\rho(x(t)) = \|x(t)\|^2$  est décroissant et tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ , ce qui implique que 0 est asymptotiquement stable pour l'équation  $x' = f(x)$ .

De même, si  $x(\cdot)$  est une solution de l'équation  $x' = g(x)$ , on obtient

$$\frac{d}{dt}\rho(x(t)) = 2\rho^2(x(t)).$$

Dans ce cas,  $\rho(x(t)) = \|x(t)\|^2$  tend vers l'infini en temps fini (phénomène d'explosion), ce qui implique que l'équilibre 0 n'est pas stable pour l'équation  $x' = g(x)$ .

## Équilibres hyperboliques

**Définition 5.4.** *Un équilibre  $x_0$  est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de  $Df(x_0)$  ont une partie réelle non nulle.*

Les équilibres hyperboliques jouent un rôle important en pratique puisque, comme nous l'avons vu à la fin de la section 2.4, la classe des matrices hyperboliques est ouverte et dense dans  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ .

D'après les deux théorèmes précédents, la stabilité d'un équilibre hyperbolique  $x_0$  est totalement caractérisée par le signe des parties réelles des valeurs propres de  $Df(x_0)$ .

**Corollaire 5.1.** *Un équilibre hyperbolique est soit asymptotiquement stable (si les valeurs propres de  $Df(x_0)$  sont toutes de partie réelle négative), soit non stable.*

Ainsi, un équilibre hyperbolique  $x_0$  est stable (resp. asymptotiquement stable) si et seulement si 0 est un équilibre stable (resp. asymptotiquement stable) pour l'équation linéarisée en  $x_0$ ,

$$y'(t) = Df(x_0) \cdot y(t). \quad (5.3)$$

On a en fait beaucoup plus : les portraits de phase du système et de son linéarisé ont la même allure car ils sont topologiquement équivalents (voir Hartman [4, th. 7.1]).

**Théorème 5.3 (d'Hartman-Grobmann).** *Soit  $x_0$  un équilibre hyperbolique. Notons  $\phi_t^L : y \mapsto e^{tDf(x_0)}y$  le flot du linéarisé en  $x_0$ . Alors il existe un homéomorphisme  $h : V_{x_0} \rightarrow V_0$ , où  $V_{x_0}$  et  $V_0$  sont des voisinages respectivement de  $x_0$  et 0 dans  $\mathbb{R}^n$ , tel que*

$$\phi_t^L(h(x)) = h(\phi_t(x)),$$

*partout où ces expressions ont un sens.*

On utilisera ce résultat en particulier pour dénombrer les orbites stables et instables en un équilibre. On dit qu'une orbite  $\mathcal{O}$  est *une orbite stable* (resp. *une orbite instable*) en un équilibre  $\bar{x}$  si, pour tout  $x \in \mathcal{O}$ , on a  $\phi_t(x) \rightarrow \bar{x}$  quand  $t \rightarrow +\infty$  (resp. quand  $t \rightarrow -\infty$ ). Le théorème d'Hartman-Grobmann implique que les orbites stables et instables en  $x_0$  sont les images par  $h^{-1}$  des orbites stables et instables en 0 du linéarisé. Or, d'après le théorème 2.8, l'ensemble des orbites

stables d'un système linéaire  $x' = Ax$  est exactement égal à l'espace stable  $E^s$  de  $A$ , de même que l'ensemble des orbites instables est égal à  $E^u$ . On sait ainsi que l'ensemble des orbites stables (resp. instables) en  $x_0$  est l'image par  $h^{-1}$  de l'espace stable (resp. instables) du linéarisé.

Par exemple, si l'espace stable du linéarisé est de dimension un, il est composé de trois orbites, deux demi-droites et 0 lui-même. Il n'y a donc, en plus de l'équilibre, que deux orbites stables en l'équilibre  $x_0$ .

### 5.3 Fonctions de Lyapunov

Il existe une autre approche que la linéarisation pour obtenir des résultats de stabilité. Commençons par donner un exemple qui illustre l'idée générale.

#### Champs de gradient

Un *champ de gradient* est un champ de vecteurs de la forme

$$f(x) = -\nabla V(x),$$

où  $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^2$  (de façon à ce que  $f$  soit de classe  $C^1$ ). Rappelons que  $\nabla V(x)$  désigne le *gradient de  $V$  en  $x$* , c'est-à-dire l'unique vecteur de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant

$$DV(x) \cdot v = \langle \nabla V(x), v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Quand le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^n$ , le gradient s'écrit en coordonnées comme  $\nabla V(x) = (\frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x))$ .

Un équilibre  $x_0$  de ce champ de vecteur est un point critique de  $V$ , *i.e.*  $\nabla V(x_0) = 0$ . Un équilibre peut donc être un minimum local, un maximum local, ou un point selle, mais nous allons voir que seuls les minima locaux peuvent être des équilibres stables.

La dynamique associée à un champ de gradient possède en effet une propriété qui la rend assez simple. Si  $x(\cdot)$  est une solution de l'équation différentielle  $x'(t) = -\nabla V(x(t))$ , alors

$$\frac{d}{dt} [V(x(t))] = DV(x(t)) \cdot x'(t) = -\|\nabla V(x(t))\|^2, \quad (5.4)$$

pour tout  $t$  dans l'intervalle de définition de  $x(\cdot)$ . Ainsi  $V(x(t))$  est soit constante, et dans ce cas  $x(t) \equiv x_0$  est un point critique, soit strictement décroissante. Intuitivement, ceci signifie que toute solution tend à se rapprocher d'un minimum, et donc (nous le montrerons plus loin) que :

- si un équilibre  $x_0$  n'est pas un minimum local (*i.e.*  $x_0$  est un maximum local ou un point selle), alors  $x_0$  n'est pas un équilibre stable;
- si  $x_0$  est un minimum local strict, alors  $x_0$  est un équilibre stable.

## Fonctions de Lyapunov

Considérons maintenant une équation différentielle autonome quelconque

$$x'(t) = f(x(t)), \quad (5.1)$$

associée à un champ de vecteurs  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . L'exemple des champs de gradient suggère d'introduire la définition suivante.

**Définition 5.5.** Soient  $x_0$  un équilibre de (5.1),  $U \subset \Omega$  un voisinage de  $x_0$  et  $L : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On dit que  $L$  est une fonction de Lyapunov pour (5.1) en  $x_0$  si :

(a)  $L(x_0) = 0$  et  $L(x) > 0$  pour  $x \in U$ ,  $x \neq x_0$  ( $x_0$  est un minimum strict de  $L$  sur  $U$ );

(b) pour tout  $x \in U$ , la fonction  $t \mapsto L(\phi_t(x))$  est décroissante.

Si de plus  $L$  satisfait

(c) pour tout  $x \in U$ ,  $x \neq x_0$ , la fonction  $t \mapsto L(\phi_t(x))$  est strictement décroissante, on dit que  $L$  est une fonction de Lyapunov stricte pour (5.1) en  $x_0$ .

Quand  $L$  est de classe  $C^1$ , les conditions (b) et (c) sont impliquées respectivement par les conditions suivantes :

(b)'  $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq 0$  pour tout  $x \in U$ ;

(c)'  $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \in U$ ,  $x \neq x_0$ .

**Théorème 5.4.** Si l'équation différentielle (5.1) admet une fonction de Lyapunov en un équilibre  $x_0$ , alors  $x_0$  est un équilibre stable. Si de plus la fonction de Lyapunov est stricte, alors  $x_0$  est asymptotiquement stable.

**\*Démonstration.** Soit  $L : U \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction de Lyapunov. Quitte à remplacer  $U$  par une boule fermée centrée en  $x_0$ , on le suppose compact. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe alors  $\alpha > 0$  tel que l'ensemble  $U_\alpha = \{x \in U : L(x) \leq \alpha\}$  est inclus dans la boule ouverte  $B(x_0, \varepsilon)$  (en effet, sinon il existe une suite de points  $x_n \in U$  en dehors de  $B(x_0, \varepsilon)$  vérifiant  $\lim L(x_n) = 0$ ;  $U$  étant compact,  $x_n$  a alors un point d'accumulation  $\bar{x} \neq x_0$ , qui doit vérifier  $L(\bar{x}) = 0$ , ce qui est impossible d'après la propriété (a)).

Or, d'après la propriété (b) de  $L$ , pour tout  $x \in U_\alpha$ , la solution  $\phi_t(x)$  est confinée dans  $U_\alpha$ ; ceci montre la stabilité de l'équilibre  $x_0$ .

▷ Supposons maintenant que  $L$  est une fonction de Lyapunov stricte. D'après ce qui précède, on peut choisir un réel  $\alpha > 0$  tel que  $U_\alpha$  soit inclus dans l'intérieur de  $U$ . Notons que  $U_\alpha$  est compact (fermé car  $L$  est continue et borné car inclus dans  $U$ ). Considérons un point  $x \in U_\alpha$  différent de  $x_0$ . La fonction  $t \mapsto L(\phi_t(x))$  étant strictement décroissante et minorée par 0, elle a une limite  $\ell$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . D'autre part,  $U_\alpha$  étant compact, il existe une suite  $t_n$ ,  $t_n \rightarrow +\infty$ , telle que  $\phi_{t_n}(x)$  est convergente. Notons  $\bar{x}$  la limite de cette dernière suite. Par continuité de  $L$ ,  $\bar{x}$  vérifie

$$L(\bar{x}) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} L(\phi_{t_n}(x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} L(\phi_t(x)) = \ell.$$

De plus, pour tout  $s > 0$ , on a

$$L(\phi_s(\bar{x})) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} L(\phi_{s+t_n}(x)) = \ell,$$

ce qui montre que  $s \mapsto L(\phi_s(\bar{x})) \equiv L(\bar{x})$  n'est pas décroissante, et donc, d'après la propriété (c) de  $L$ , que  $\bar{x} = x_0$ .

Ainsi, le seul point d'accumulation de  $\phi_t(x)$  est  $x_0$ , ce qui montre que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0$  pour tout  $x$  dans le voisinage  $U_\alpha$  de  $x_0$ . L'équilibre  $x_0$  est donc asymptotiquement stable.  $\square$

Pour un équilibre asymptotiquement stable  $x_0$ , on appelle *bassin d'attraction* l'ensemble des points  $x \in \Omega$  tels que  $\phi_t(x) \rightarrow x_0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . Par définition de la stabilité asymptotique, le bassin d'attraction contient un voisinage de  $x_0$ . Une question importante en pratique est de déterminer la taille de ce bassin, voire le bassin lui-même. Le domaine de définition d'une fonction de Lyapunov stricte, si il en existe une, donne des éléments de réponse à cette question.

**Théorème 5.5.** *Considérons une équation différentielle (5.1) définie sur  $\mathbb{R}^n$ . Supposons qu'elle admette en un équilibre  $x_0$  une fonction de Lyapunov stricte  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$\|x\| \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad L(x) \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

*Alors le bassin d'attraction de  $x_0$  est  $\mathbb{R}^n$  tout entier. On dit dans ce cas que l'équilibre  $x_0$  est globalement asymptotiquement stable.*

**\*Démonstration.** Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\alpha = L(x)$ . La condition (5.5) implique que  $U_\alpha = \{y \in \mathbb{R}^n : L(y) \leq \alpha\}$  est borné, et donc compact. On montre alors que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0$  exactement de la même façon que dans la preuve du théorème 5.4.  $\square$

*Remarque 5.4.* La preuve ci-dessus peut être trivialement adaptée au cas où le domaine de définition est un ouvert  $\Omega$  et non  $\mathbb{R}^n$  tout entier. La condition (5.5) sur la fonction de Lyapunov stricte  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  doit simplement être remplacée par :

$$x \rightarrow \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad L(x) \rightarrow \infty.$$

Plus généralement, si  $L : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Lyapunov stricte en  $x_0$  et  $P \subset U$  est un sous-ensemble compact de  $\Omega$  positivement invariant par le flot (*i.e.*  $\phi_t(P) \subset P$  pour tout  $t \geq 0$ ), alors  $P$  est inclus dans le bassin d'attraction de  $x_0$ . Par exemple, les ensembles de niveau  $\{x \in U : L(x) \leq \alpha\}$  pour  $\alpha$  suffisamment petit sont compacts et positivement invariants, donc inclus dans le bassin d'attraction.

## Exemples d'application

### a. Champs de gradient

Reprenons le cas d'un champ de gradients  $f(x) = -\nabla V(x)$ . Supposons que  $x_0$  soit un minimum local strict de  $V$ , c'est-à-dire l'unique minimum de  $V$  sur un voisinage  $U$  de  $x_0$ . La fonction  $V$  restreinte à  $U$  est bien une fonction de Lyapunov en  $x_0$ , la propriété (b)' étant toujours satisfaite d'après la formule (5.4). Donc  $x_0$  est bien un équilibre stable.

### b. Champ de force conservatif

Considérons un objet de masse  $m$  soumis à une force dérivant d'un potentiel  $V(x)$ . L'évolution de l'état  $x \in \mathbb{R}^n$  de l'objet au cours du temps est régi par le principe fondamental de la dynamique :

$$mx''(t) = -\nabla V(x(t)),$$

que l'on réécrit

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -\frac{1}{m}\nabla V(x(t)) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,  $(x, x')$  est solution de l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^{2n}$

$$(x, v)'(t) = f((x, v)(t)), \quad \text{où } f(x, v) = \left(v, -\frac{1}{m}\nabla V(x)\right).$$

Un équilibre de cette équation différentielle est un point  $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$  où  $x_0$  est un point critique du potentiel  $V(x)$ .

Supposons que  $x_0$  soit un minimum local strict de  $V$  et cherchons une fonction de Lyapunov. Essayons à partir de l'énergie totale du système :

$$E(x, v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 + V(x).$$

En posant  $L(x, v) = E(x, v) - V(x_0)$ , on obtient une fonction qui satisfait la propriété (a) d'une fonction de Lyapunov. De plus, comme  $\nabla L(x, v) = (\nabla V(x), mv)$ , on obtient

$$\langle \nabla L(x, v), f(x, v) \rangle \equiv 0,$$

(c'est la conservation de l'énergie!), c'est-à-dire la propriété (b)'. La fonction  $L$  est donc bien une fonction de Lyapunov en  $(x_0, 0)$ , ce qui montre le résultat bien connu (théorème de Lagrange) : *si l'énergie potentielle  $V(x)$  a un minimum local strict en  $x_0$ , l'équilibre  $(x_0, 0)$  est stable.*

*Remarque 5.5.*

- L'équilibre  $(x_0, 0)$  ne peut pas être asymptotiquement stable : la fonction de Lyapunov  $L(x, v)$  étant constante le long d'une solution  $(x, v)(\cdot) \neq (x_0, 0)$ , elle ne peut tendre vers 0, ce qui implique que  $(x, v)(t)$  ne peut pas tendre vers  $(x_0, 0)$ .
- L'approche par linéarisation n'aurait pas permis de conclure ici car  $(x_0, 0)$  n'est pas un équilibre hyperbolique (exercice : le montrer).

*c. Champ de vecteur linéaire*

Considérons une équation différentielle linéaire

$$x'(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et supposons que toutes les valeurs propres de  $A$  sont de partie réelle strictement négative. On a vu (proposition 5.1) que dans ce cas l'origine est un équilibre asymptotiquement stable. Cherchons une fonction de Lyapunov pour cette équation en 0. On pose

$$L(x) = \int_0^\infty \|e^{sA}x\|^2 ds.$$

D'après le théorème 2.8, si  $-\alpha < 0$  est strictement plus grand que les parties réelles de toutes les valeurs propres de  $A$ , alors

$$\|e^{sA}x\| \leq Ce^{-\alpha s}\|x\|, \quad \forall s \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi  $L(x)$  est définie par une intégrale convergente. Montrons que c'est une fonction de Lyapunov stricte en 0. La propriété (a) est clairement satisfaite. Montrons maintenant la propriété (c)'. On calcule d'abord la différentielle de  $L$  par différentiation sous le signe somme :

$$DL(x) \cdot v = \int_0^\infty D(\|e^{sA}x\|^2) \cdot v ds = 2 \int_0^\infty \langle e^{sA}x, e^{sA}v \rangle ds.$$

Calculons alors  $\langle \nabla L(x), Ax \rangle = DL(x) \cdot (Ax)$  pour  $x \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \langle \nabla L(x), Ax \rangle &= 2 \int_0^\infty \langle e^{sA}x, e^{sA}Ax \rangle ds \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} (\|e^{sA}x\|^2) ds \\ &= -\|x\|^2 < 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $L$  est une fonction de Lyapunov stricte en 0.

*d. Nouvelle preuve du théorème 5.1*

Considérons un équilibre  $x_0$  de l'équation différentielle

$$x'(t) = f(x(t)),$$

et supposons que toutes les valeurs propres de  $Df(x_0)$  sont de partie réelle strictement négative. Nous allons montrer que l'équation admet une fonction de Lyapunov stricte en  $x_0$ , ce qui donnera une nouvelle preuve du théorème 5.1.

Quitte à faire une translation, on suppose  $x_0 = 0$  et on pose

$$L(x) = \int_0^\infty \|e^{sDf(0)}x\|^2 ds$$

(c'est-à-dire, d'après le paragraphe précédent, que  $L$  est la fonction de Lyapunov associée à l'équation linéaire  $y'(t) = Df(0) \cdot y(t)$ ). La propriété (a) d'une fonction de Lyapunov est bien vérifiée. Remarquons d'autre part que

$$f(x) = Df(0) \cdot x + o(\|x\|).$$

En utilisant le paragraphe précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \nabla L(x), f(x) \rangle &= \langle \nabla L(x), Df(0) \cdot x \rangle + \langle \nabla L(x), o(\|x\|) \rangle \\ &= -\|x\|^2 + 2 \int_0^\infty \langle e^{sDf(0)}x, e^{sDf(0)}o(\|x\|) \rangle ds. \end{aligned}$$

Le terme dans la dernière intégrale est un  $o(\|x\|^2)$ , donc pour  $\|x\|$  suffisamment petit,  $x \neq 0$ , on obtient

$$\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq -\frac{1}{2}\|x\|^2 < 0,$$

c'est-à-dire la propriété (c)'. La fonction  $L$  est donc une fonction de Lyapunov stricte en  $x_0 = 0$ , ce qui montre que cet équilibre est asymptotiquement stable.

## 5.4 Exercices corrigés

**Exercice 5.1.** L'analyse des circuits électriques RLC conduit à des équations différentielles sur  $\mathbb{R}^2$  du type

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = v - h(i), \\ C \frac{dv}{dt} = -i, \end{cases} \quad (5.6)$$

où  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$ . Les variables  $v$  et  $i$  sont respectivement un voltage et une intensité et les constantes positives  $L$  et  $C$  une résistance et une capacité. L'énergie du système est  $E(i, v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2)$ .



1. Déterminer l'équilibre de l'équation (5.6) et discuter sa stabilité en fonction de  $h'(0)$ .
2. Supposons que  $h$  vérifie  $xh(x) > 0$  pour  $x \neq 0$ . Montrer que l'équilibre est asymptotiquement stable et déterminer son bassin d'attraction.

### Corrigé de l'exercice 5.1.

1. L'équilibre est le point  $i = 0, v = h(0)$ . Le linéarisé de l'équation différentielle en ce point est  $y'(t) = Ay(t)$ , où

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{h'(0)}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que  $\det A = 1/(LC) > 0$ . Les valeurs propres de  $A$  ont donc des parties réelles de même signe, qui est aussi le signe de  $\operatorname{tr} A = -h'(0)/L$  (d'après la remarque 2.6). On en conclut que :

- si  $h'(0) > 0$ , l'équilibre est asymptotiquement stable;
- si  $h'(0) < 0$ , l'équilibre n'est pas stable;
- si  $h'(0) = 0$ , l'équilibre n'est pas hyperbolique, on ne peut rien dire en utilisant le linéarisé.

2. Notons d'abord que l'hypothèse sur  $h$  implique  $h(0) = 0$ . L'équilibre est donc l'origine. Essayons de montrer que l'énergie  $E(i, v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2)$  est une fonction de Lyapunov stricte en 0. On a déjà :

- 0 est un minimum strict de  $E$ ;
- $\frac{dE}{dt} = -ih(i) < 0$  si  $i \neq 0$ .

On a donc montré que, le long d'une trajectoire  $x(t) = (i(t), v(t))$ , la fonction  $E(x(t))$  est strictement décroissante tant que  $i(t) \neq 0$ . Or, si  $x(t)$  n'est pas identiquement nulle, les instants  $t_0$  où  $i(t_0) = 0$  sont isolés puisqu'alors  $i'(t_0) = v(t_0) \neq 0$ . Ainsi  $\frac{dE}{dt} < 0$  presque partout le long d'une trajectoire; on en déduit que  $E(x(t))$  est strictement décroissante.

Par conséquent la fonction  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Lyapunov stricte en 0, ce qui montre que 0 est un équilibre asymptotiquement stable. Comme de plus  $E(x) \rightarrow \infty$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$ , le bassin d'attraction de 0 est  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

### Exercice 5.2.

**Modèle micro-économique.** Dans un modèle d'économie de pure accumulation, on ne fait pas apparaître explicitement le travail, toute production étant accumulée. Le modèle est alors caractérisé par les fonctions de production des biens et par les coefficients de dépréciation des capitaux. Considérons par exemple un modèle comportant deux biens capitaux, 1 et 2. On note  $Y_i$  la quantité de bien  $i$  produite

et  $k_i$  la quantité de bien  $i$  entrant comme capital dans la production. Les fonctions de production sont de la forme

$$\begin{cases} Y_1 = \lambda_1 k_1^{\alpha_1} k_2^{\beta_1}, \\ Y_2 = \lambda_2 k_1^{\alpha_2} k_2^{\beta_2}, \end{cases}$$

où les coefficients  $\lambda_i$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  appartiennent à  $[0, 1]$ . Le coefficient de dépréciation du capital  $i$  est un réel  $\rho_i \in [0, 1]$ . L'équation du système est donc

$$\begin{cases} k_1' = Y_1 - \rho_1 k_1, \\ k_2' = Y_2 - \rho_2 k_2. \end{cases}$$

Pour éviter des calculs fastidieux, on donne ci-dessous une équation différentielle dont les solutions présentent les mêmes caractéristiques dynamiques que celles de ce système, mais dont l'étude est plus simple. On encourage cependant le lecteur courageux à reprendre les calculs, une fois l'exercice résolu, pour les adapter au vrai système.

Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} k_1' = k_2 k_1 - k_1^3, \\ k_2' = k_1 k_2 - k_2^3, \end{cases}$$

qui résulte d'un modèle micro-économique simplifié, les variables  $k_1$  et  $k_2$  pouvant représenter des stocks de capitaux. On étudie l'évolution des stocks de capitaux, que l'on suppose tous deux strictement positifs (à justifier).

1. Déterminer l'équilibre du système dans  $]0, +\infty[^2$ .
2. Étudier sa stabilité par linéarisation.
3. Étudier le portrait de phase dans  $]0, +\infty[^2$  : on montrera que toute solution de l'équation différentielle a une limite puis que le bassin d'attraction de l'équilibre est tout  $]0, +\infty[^2$ .

### Corrigé de l'exercice 5.2.

1. L'équation différentielle s'écrit  $k'(t) = f(k(t))$ , avec  $k = (k_1, k_2) \in ]0, +\infty[^2$  et

$$f(k) = \begin{pmatrix} (k_2 - k_1^2)k_1 \\ (k_1 - k_2^2)k_2 \end{pmatrix}.$$

Remarquons d'abord que  $f_1(k) = 0$  sur l'axe  $Ok_2$  et que  $f_2(k) = 0$  sur l'axe  $Ok_1$ ; l'orbite d'un point sur l'axe  $Ok_1$  est donc contenue dans  $Ok_1$ , de même pour  $Ok_2$ .

Il est donc impossible de traverser un axe, ce qui implique que, si les capitaux  $k_1$  et  $k_2$  sont positifs à l'instant initial, ils le restent au cours du temps.

Un équilibre satisfait  $f(k) = 0$ . Or

$$f_1(k) = 0 \Rightarrow k_2 = k_1^2 \quad \text{et} \quad f_2(k) = 0 \Rightarrow k_1 = k_2^2,$$

c'est-à-dire que le seul équilibre dans  $]0, +\infty[^2$  est

$$\bar{k} = (1, 1).$$

2. Calculons la différentielle du champ  $f$  :

$$Df(k) = \begin{bmatrix} k_2 - 3k_1^2 & k_1 \\ k_2 & k_1 - 3k_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow Df(\bar{k}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Comme  $\det Df(\bar{k}) = 3 > 0$  et  $\text{tr} Df(\bar{k}) = -4 < 0$ , les deux valeurs propres de la matrice ont des parties réelles strictement négatives. On en conclut que  $\bar{k}$  est un équilibre asymptotiquement stable.

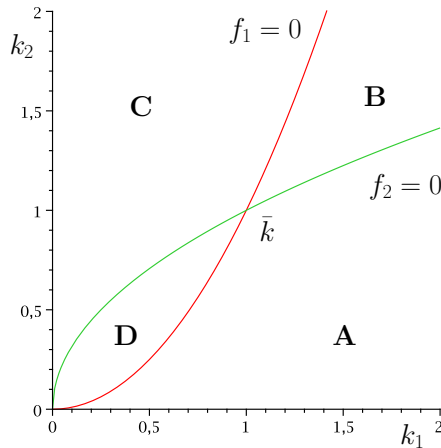


Fig. 5.2. Isoclines de  $f(k)$

3. Séparons le quadrant positif en 4 régions, comme indiqué sur la figure 5.2. Nous allons d'abord montrer que toute solution de l'équation différentielle est définie sur  $[0, +\infty[$  et a une limite quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Considérons d'abord la région  $D$ . Sur les bords de  $D$ , excepté en  $\bar{k}$ , le champ de vecteurs  $f$  est dirigé vers l'intérieur de  $D$ . Autrement dit, si  $k \in \partial D$ ,  $k \neq \bar{k}$ , le flot

$\phi_t(k)$  de  $f$  appartient à  $D$  pour  $t > 0$  suffisamment petit. La région  $D$  est donc positivement invariante par le flot, *i.e.*  $\phi_t(D) \subset D$ .

Prenons alors une solution  $k(\cdot)$  sur  $[0, +\infty[$  dont la condition initiale  $k(0) \in D$ . Elle est contenue dans  $D$ , où  $f_1$  et  $f_2$  sont positives, donc  $k_1(t)$  et  $k_2(t)$  sont croissantes. On en déduit que  $k(\cdot)$  est incluse dans le compact  $\{k_1 \geq k_1(0), k_2 \geq k_2(0)\} \cap \bar{D}$ , ce qui implique qu'elle est définie sur tout  $[0, +\infty[$ , et que ses coordonnées  $k_1(\cdot)$  et  $k_2(\cdot)$  y sont croissantes :  $k(t)$  a donc une limite dans ce compact quand  $t \rightarrow \infty$ .

Le même raisonnement vaut pour la région  $B$  : elle est positivement invariante et toute solution  $k(\cdot)$  contenue dans cette région a des coordonnées décroissantes :  $k(\cdot)$  est donc définie sur tout  $[0, +\infty[$  et  $k(t)$  a une limite dans  $\bar{B}$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

Considérons maintenant une solution  $k(\cdot)$  dont la condition initiale  $k(0)$  appartient à la région  $A$ . Il y a deux possibilités :

- soit la solution  $k(\cdot)$  sort de  $A$  : elle entre alors soit dans  $B$ , soit dans  $D$ , et on est ramené à l'étude précédente;
- soit  $k(\cdot)$  reste dans  $A$  : les coordonnées  $k_1(\cdot)$  et  $k_2(\cdot)$  sont alors respectivement décroissantes et croissantes, toutes les deux bornées : pour tout  $t \geq 0$  où  $k(t)$  est définie, on a  $k_1(t) \leq k_1(0)$ ,  $k_2(0) \leq k_2(t)$  et :

$$k_1(t) \geq \sqrt{k_2(t)} \geq \sqrt{k_2(0)} \quad \text{et} \quad k_2(t) \leq \sqrt{k_1(t)} \leq \sqrt{k_1(0)}.$$

Comme ci-dessus, on en déduit d'une part que  $k(t)$  est définie pour tout  $t \geq 0$  et d'autre part que, quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $k(t)$  a une limite appartenant à  $]0, +\infty[^2$ .

Le même raisonnement vaut pour la région  $C$ . On a donc montré que toute solution de l'équation est définie sur  $[0, +\infty[$  et a une limite dans  $]0, +\infty[^2$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Or nous avons vu dans un exercice précédent (question 7. de l'exercice 4.2) que, si une solution a une limite, cette limite est un équilibre. Ainsi, la limite d'une solution est toujours l'équilibre  $\bar{k}$ . Ainsi, on a montré que le bassin d'attraction de  $\bar{k}$  est tout le quadrant positif.

**Exercice 5.3.** Dans un bassin cylindrique en verre de rayon  $R > 0$  contenant un liquide nutritif se trouvent diverses espèces de parasites phototropes, c'est-à-dire se dirigeant vers la lumière. Chaque espèce est caractérisée par sa vitesse de déplacement  $v > 0$ .

Pour séparer ces diverses espèces, on place le récipient sur un plateau tournant à la vitesse angulaire  $\alpha > 0$  et on dispose à proximité une source lumineuse fixe. Dans un repère  $(O, x, y)$  fixe du plan où  $O$  est le centre du cylindre, les équations du mouvement de l'espèce dont la vitesse de déplacement est  $v$  sont :

$$\begin{aligned} x' &= -\alpha y + v \frac{R - x}{\sqrt{(R - x)^2 + y^2}}, \\ y' &= \alpha x - v \frac{y}{\sqrt{(R - x)^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

la source lumineuse étant au point de coordonnées  $(R, 0)$ .

On suppose que  $v < \alpha R$ .

1. Montrer que l'équation différentielle admet un unique point d'équilibre, dont les coordonnées  $(x_* = r \cos \theta, y_* = r \sin \theta)$  satisfont

$$r = \frac{v}{\alpha} \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{r}{R} .$$

On posera  $\rho = \sqrt{(R - x_*)^2 + y_*^2}$  dans les calculs.

2. Montrer que  $P_*$  est un équilibre asymptotiquement stable.

3. On admettra que  $P_*$  est globalement asymptotiquement stable. Comment séparer les différentes espèces de parasites?

### Corrigé de l'exercice 5.3.

1. Si  $(x_*, y_*)$  est un point d'équilibre on a par définition

$$\alpha y_* = v \frac{R - x_*}{\rho} \quad \alpha x_* = v \frac{y_*}{\rho} .$$

On a donc

$$\alpha^2 r^2 = v^2 \frac{(R - x_*)^2 + y_*^2}{\rho^2} ,$$

soit  $r = \frac{v}{\alpha}$ . De même si on fait le quotient des deux équations précédentes on trouve

$$\operatorname{tg} \theta + \operatorname{cotg} \theta = \frac{R}{r \sin \theta} ,$$

et donc  $\cos \theta = \frac{r}{R}$ . Comme  $\sin \theta$  est positif ceci détermine parfaitement  $\theta$ .

2. Le linéarisé autour de l'équilibre  $P_*$  a pour équation  $Y' = AY$ , où

$$A = DF(P_*) = \begin{pmatrix} v \left( \frac{(R - x_*)^2}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right) & -\alpha + v \frac{(R - x_*) y_*}{\rho^3} \\ \alpha + v \frac{(R - x_*) y_*}{\rho^3} & v \left( \frac{y_*^2}{\rho^3} - \frac{1}{\rho} \right) \end{pmatrix} .$$

Le déterminant  $\det A = \alpha^2$  est positif alors que la trace  $\operatorname{tr} A = -\frac{v}{\rho}$  est négative. Par conséquent (voir remarque 2.6) l'équilibre est toujours asymptotiquement stable.

3. On peut séparer les espèces puisque deux  $v$  différents donnent deux  $P_*$  distincts qui sont tous deux globalement attractifs. Il suffit de plonger une épuisette au bon endroit...

**Exercice 5.4.** Reprenons le modèle prédateur/proie de Volterra, déjà étudié dans l'exercice 4.2 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} (a - by)x \\ (fx - c)y \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les équilibres de cette équation dans  $\mathbb{R}^2$  et discuter leur stabilité, d'abord en étudiant le linéarisé, puis en cherchant si nécessaire une fonction de Lyapunov.

Une des hypothèses du modèle de Volterra est que, en l'absence d'interactions, la population des proies augmente indéfiniment alors que les prédateurs disparaissent totalement. Ceci n'est pas très vraisemblable. Une hypothèse plus satisfaisante est que, en l'absence d'interactions toujours, les populations obéissent à une loi logistique,

$$x' = (a - px)x, \quad y' = -(c + qy)y,$$

où  $p, q > 0$  sont des constantes. On obtient de cette façon un nouveau modèle prédateur/proie,

$$\begin{cases} x'(t) = (a - by(t) - px(t))x(t), \\ y'(t) = (-c + fx(t) - qy(t))y(t). \end{cases} \quad (5.7)$$

On fera ici l'hypothèse que  $p$  est petit, et donc que  $c/f < a/p$ .

2. Déterminer les équilibres de cette équation dans  $(\mathbb{R}^+)^2$  et étudier leur stabilité.

3. Déterminer le bassin d'attraction du seul équilibre asymptotiquement stable  $(\bar{x}, \bar{y})$  appartenant à  $(\mathbb{R}^+)^2$ .

*Indication:* par analogie avec le modèle de Volterra, on cherchera une fonction de Lyapunov sous la forme

$$L(x, y) = K_1 \bar{x} \left( \frac{x}{\bar{x}} - \log \left( \frac{x}{\bar{x}} \right) - 1 \right) + K_2 \bar{y} \left( \frac{y}{\bar{y}} - \log \left( \frac{y}{\bar{y}} \right) - 1 \right).$$

#### Corrigé de l'exercice 5.4.

1. Notons  $F(x, y) = ((a - by)x, (fx - c)y)$  le champ de vecteurs défini par l'équation de Volterra. Les équilibres de l'équation (c'est-à-dire les zéros de  $F$ ) sont 0 et  $\bar{z} = (c/f, a/b)$ . Calculons la différentielle de  $F$  :

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ fy & fx - c \end{pmatrix}.$$

Les linéarisés autour des équilibres 0 et  $\bar{z}$  ont donc pour matrice, respectivement,

$$DF(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad DF(\bar{z}) = \begin{pmatrix} 0 & -b\bar{x} \\ f\bar{y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $DF(0)$  sont  $a$  et  $-c$  :  $a$  étant positif, ceci montre que l'équilibre  $0$  n'est pas stable (donc a fortiori pas asymptotiquement stable).

Les valeurs propres de  $DF(\bar{z})$  sont imaginaires pures, on ne peut donc rien en conclure sur la stabilité de l'équilibre  $\bar{z}$ . On va alors chercher une fonction de Lyapunov : soit  $V$  la fonction trouvée à la question **2.** de l'exercice 4.2,

$$V(x, y) = (fx - c \log x) + (by - a \log y),$$

et posons  $L(x, y) = V(x, y) - V(\bar{z})$ . La fonction  $L : ]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Lyapunov (non stricte) pour l'équation de Volterra en  $\bar{z}$  car :

- $L(\bar{z}) = 0$  et  $L(x, y) > 0$  pour tout  $(x, y) \neq \bar{z}$  dans  $]0, +\infty[^2$ , puisque  $\bar{z}$  est un minimum strict de  $V$  sur  $]0, +\infty[^2$ ;
- $L$  est constante le long des solutions de l'équation.

On en conclut que l'équilibre  $\bar{z}$  est stable. En revanche il n'est pas asymptotiquement stable, puisque, toute solution non triviale étant périodique et contenue dans une ligne de niveau de  $L(x, y)$ , elle ne peut tendre vers  $\bar{z}$  (c'était de toute façon évident sur le portrait de phase).

**2.** Notons  $G(x, y) = ((a - px - by)x, (-c + fx - qy)y)$  le champ de vecteur définissant l'équation (5.7). Les équilibres de l'équation sont les solutions de  $G(x, y) = 0$ , c'est-à-dire de :

$$\begin{cases} px + by = a \text{ ou } x = 0, \\ fx - qy = c \text{ ou } y = 0. \end{cases}$$

Ce système a quatre solutions :

- $z_1 = (x_1, y_1)$  vérifiant  $\begin{cases} px_1 + by_1 = a, \\ fx_1 - qy_1 = c; \end{cases}$
- $z_2 = (a/p, 0)$ ;
- $z_3 = (0, -c/q)$ ;
- l'origine.

L'hypothèse  $c/f < a/p$  entraîne que  $z_1 \in (\mathbb{R}^+)^2$ , ce qui est aussi le cas pour  $z_2$  et  $0$ . En revanche  $z_3$  n'appartient pas à  $(\mathbb{R}^+)^2$ .

Étudions maintenant la stabilité des trois équilibres de  $(\mathbb{R}^+)^2$ , i.e.  $z_1$ ,  $z_2$  et  $0$ , en utilisant que la différentielle de  $G$  est :

$$DG(x, y) = \begin{pmatrix} a - 2px - by & -bx \\ fy & -c + fx - 2qy \end{pmatrix}.$$

- En  $z_1$ : la différentielle de  $G$  vaut

$$DG(z_1) = \begin{pmatrix} -px_1 & -bx_1 \\ fy_1 & -qy_1 \end{pmatrix},$$

dont la trace est  $-(px_1 + qy_1) < 0$  et le déterminant  $(pq + fb)x_1y_1 > 0$ . Les valeurs propres de cette matrice sont donc de partie réelle négative, ce qui entraîne que  $z_1$  est un équilibre asymptotiquement stable.

- En  $z_2$ : la différentielle de  $G$  vaut

$$DG(z_2) = \begin{pmatrix} -a & -(ab)/p \\ 0 & -c + (fa)/p \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont  $-a$  et  $-c + (fa)/p$ . Comme  $c/f < a/p$ , la deuxième valeur propre est positive, c'est-à-dire que l'équilibre  $z_2$  n'est pas stable.

- En 0: la différentielle de  $G$  vaut

$$DG(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont  $a$  et  $-c$ . L'équilibre 0 n'est donc pas stable.

**3.** On a vu que le seul équilibre asymptotiquement stable de  $G$  est  $z_1$ . On sait déjà que son bassin d'attraction est inclus dans le quadrant positif  $]0, +\infty[^2$ , puisque, comme pour l'équation de Volterra, les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont invariants par le flot de  $G$  (c'est-à-dire que toute solution dont une valeur appartient à un de ces axes est contenue dedans).

On va chercher à montrer que le bassin d'attraction de  $z_1$  est en fait tout le quadrant positif. Commençons par trouver une fonction de Lyapunov stricte pour  $G$  en  $z_1$  dont le domaine de définition soit  $]0, +\infty[^2$ . Par analogie avec la question 1, on va chercher cette fonction de Lyapunov  $L : ]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sous la forme :

$$L(x, y) = K_1 x_1 \left( \frac{x}{x_1} - \log \left( \frac{x}{x_1} \right) - 1 \right) + K_2 y_1 \left( \frac{y}{y_1} - \log \left( \frac{y}{y_1} \right) - 1 \right)$$

(notez que, quand  $p = q = 0$ , on retrouve la fonction de Lyapunov pour l'équation de Volterra en prenant  $K_1 = f$ ,  $K_2 = b$ ).

Calculons d'abord le gradient et la hessienne de  $L$  :

$$\nabla L(x, y) = \begin{pmatrix} K_1 \left(1 - \frac{x_1}{x}\right) \\ K_2 \left(1 - \frac{y_1}{y}\right) \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 L(x, y) = \begin{pmatrix} K_1 \frac{x_1}{x^2} & 0 \\ 0 & K_2 \frac{y_1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Si  $K_1$  et  $K_2$  sont positifs,  $L$  est une fonction strictement convexe (hessienne définie positive) dont l'unique minimum est  $z_1$  (le zéro du gradient).

Montrons maintenant que l'on peut choisir  $K_1$  et  $K_2$  positifs de façon à ce que  $L$  soit strictement décroissante le long des solutions de (5.7), ou plutôt tels que



$$\langle \nabla L(x, y), G(x, y) \rangle < 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \neq z_1.$$

En notant  $G = (G_1, G_2)$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \nabla L(x, y), G(x, y) \rangle &= K_1 \left(1 - \frac{x_1}{x}\right) G_1(x, y) + K_2 \left(1 - \frac{y_1}{y}\right) G_2(x, y) \\ &= K_1 (x - x_1) \frac{G_1(x, y)}{x} + K_2 (y - y_1) \frac{G_2(x, y)}{y}. \end{aligned}$$

Or  $a = px_1 + by_1$  et  $c = fx_1 - qy_1$ , ce qui permet d'écrire

$$\frac{G_1(x, y)}{x} = -p(x - x_1) - b(y - y_1) \quad \text{et} \quad \frac{G_2(x, y)}{y} = f(x - x_1) - q(y - y_1).$$

Ainsi,

$$\langle \nabla L(x, y), G(x, y) \rangle = -K_1 p (x - x_1)^2 - K_2 q (y - y_1)^2 + (-bK_1 + fK_2)(x - x_1)(y - y_1).$$

En prenant par exemple  $K_1 = f$  et  $K_2 = b$ , on obtient

$$\langle \nabla L(x, y), G(x, y) \rangle = -fp(x - x_1)^2 - bq(y - y_1)^2 < 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \neq z_1.$$

On a donc trouvé une fonction de Lyapunov  $L$  stricte en  $z_1$  définie sur tout le quadrant positif. Comme de plus  $L(x, y)$  tend vers l'infini quand  $(x, y)$  tend vers un bord du quadrant (c'est-à-dire que les lignes de niveau de  $L$  sont des compacts du quadrant), on conclut en utilisant la remarque 5.4 que ce quadrant est le bassin d'attraction de  $z_1$ .

**Exercice 5.5.** On cherche ici à analyser le phénomène de la vague solitaire, ou *soliton*. Le problème est modélisé comme un long canal considéré comme unidimensionnel. La quantité intéressante est le profil  $y$  de la surface de l'eau, qui est une fonction du temps  $t$  et de la position  $x$  le long du canal. Ce profil est mesuré par rapport à la hauteur  $h$  de l'eau au repos. Il doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles dite de Korteweg-de Vries,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial x} \left( hy + \frac{3}{4} y^2 + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right), \quad (5.8)$$

où  $g$  est la constante de gravitation et  $\sigma > 0$  est une constante (qui dépend de  $h$ , de  $g$  et de la tension superficielle).

On appelle soliton une solution  $y(t, x)$  de l'équation aux dérivées partielles telle que :

- $y(t, x) = z(s)$ , où  $s = x - vt$ ,  $v$  étant une constante (c'est la vitesse de la vague);
- $z(s)$  et toutes ses dérivées tendent vers 0 quand  $s \rightarrow \pm\infty$  (la surface de l'eau est au repos loin du soliton).

Le but de l'exercice est de mettre en évidence l'existence de telles solution et de préciser la vitesse et l'amplitude de la vague.

1. Montrer qu'un soliton  $z(s)$  vérifie

$$\sigma z''(s) = bz(s) - \frac{3}{2}z^2(s), \quad (5.9)$$

où  $b$  est une constante.

Quitte à remplacer  $s$  par  $s/\sqrt{\sigma}$ , on suppose dans la suite  $\sigma = 1$ . On note  $f$  le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  défini par l'équation (5.9).

2. Déterminer les équilibres de  $f$  et discuter leur stabilité en utilisant la méthode de linéarisation. Que peut-on dire sur l'existence de solitons?

3. Trouver une constante du mouvement, c'est-à-dire une fonction  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  constante le long des solutions de  $f$ .

4. Montrer que, si  $b < 0$ , il n'y a pas de soliton.

5. Supposons  $b > 0$ . Montrer qu'il existe un unique soliton, tracer son orbite et déterminer son amplitude.

### Corrigé de l'exercice 5.5.

1. Pour une fonction  $y(t, x) = z(s)$ , où  $s = x - vt$ , les dérivées partielles s'écrivent  $\frac{\partial y}{\partial t} = -vz'(s)$  et  $\frac{\partial y}{\partial x} = z'(s)$ . L'équation (5.8) de Korteweg-de Vries s'écrit donc :

$$-vz'(s) = -\sqrt{\frac{g}{h}} \frac{d}{ds} \left( hz(s) + \frac{3}{4}z^2(s) + \frac{\sigma}{2}z''(s) \right),$$

ou encore

$$\frac{d}{ds} \left( 2(h - v\sqrt{\frac{h}{g}})z(s) + \frac{3}{2}z^2(s) + \sigma z''(s) \right) = 0.$$

La quantité  $2(h - v\sqrt{\frac{h}{g}})z(s) + \frac{3}{2}z^2(s) + \sigma z''(s)$  est donc indépendante de  $s$ . Les conditions aux limites impliquent qu'elle est nulle, ce qui donne l'équation (5.9), avec

$$b = 2(v\sqrt{\frac{h}{g}} - h).$$

2. Le champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  associé à l'équation est

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ bx_1 - \frac{3}{2}x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Ce champ a deux équilibres : 0 et  $\bar{x} = (\frac{2b}{3}, 0)$ .

Calculons le linéarisé autour de chacun des équilibres. On a

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b - 3x_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Df(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres du linéarisé en 0 sont donc

$$\pm i\sqrt{|b|} \text{ si } b \leq 0, \quad \pm\sqrt{|b|} \text{ si } b \geq 0,$$

et celles du linéarisé en  $\bar{x}$  sont

$$\pm\sqrt{|b|} \text{ si } b \leq 0, \quad \pm i\sqrt{|b|} \text{ si } b \geq 0.$$

Ainsi, pour  $b > 0$ , 0 est un équilibre non stable, et on ne peut pas conclure pour  $\bar{x}$ , qui n'est pas hyperbolique. Inversement, pour  $b < 0$ ,  $\bar{x}$  n'est pas stable et 0 n'est pas hyperbolique.

Qu'en conclure pour l'existence de solitons? On sait que pour un soliton  $z(s)$ , la solution  $(z(s), z'(s))$  de  $x' = f(x)$  tend vers 0 quand  $s \rightarrow \pm\infty$ . Pour qu'un soliton existe, il faut donc qu'il existe une solution de  $x' = f(x)$  qui tende vers 0 en  $\pm\infty$ . Quand  $b < 0$ , la linéarisation ne nous apprend rien. Quand  $b > 0$  en revanche, 0 est un équilibre hyperbolique. D'après le théorème 5.3 d'Hartman-Grobmann, on sait alors que, au voisinage de 0, le portrait de phase de  $x' = f(x)$  est topologiquement équivalent à celui de l'équation linéarisée : puisque celle-ci a une valeur propre positive et une négative, il y a que 2 solutions qui tendent vers 0 en  $+\infty$ , et 2 en  $-\infty$ . Il est donc possible qu'il existe des solitons, mais pas plus de 2! Remarquons que si les valeurs propres du linéarisé avaient été toutes deux de même signe, on aurait pu conclure qu'il n'y avait pas de solitons.

**3.** Il faut trouver  $L$  telle que  $f(x)^T \nabla L(x) \equiv 0$ , c'est-à-dire

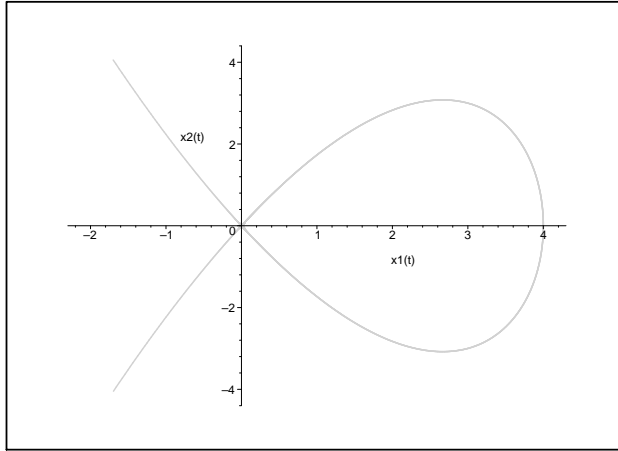
$$x_2 \frac{\partial L}{\partial x_1}(x) + (bx_1 - \frac{3}{2}x_1^2) \frac{\partial L}{\partial x_2}(x) = 0.$$

On peut prendre par exemple  $L(x) = \frac{x_1^2}{2}(x_1 - b) + \frac{x_2^2}{2}$ .

**4.** Soit  $x(\cdot) = (z(\cdot), z'(\cdot))$  une solution de  $x' = f(x)$  associée à un soliton  $z(\cdot)$ . On sait que  $L(x(s))$  est une constante, et, vu les conditions aux limites des solitons, cette constante est  $L(0) = 0$ . Ainsi l'orbite de  $x(\cdot)$  est contenue dans

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : L(x) = 0\}.$$

Or, quand  $b < 0$ , 0 est un point isolé de cette courbe de niveau (c'est un minimum local). La seule solution tendant vers 0 en  $\pm\infty$  est donc la solution triviale  $x(t) \equiv 0$ . Il n'y a donc pas de solitons pour  $b < 0$ .



**Fig. 5.3.** Ensemble  $\{L(x) = 0\}$

**5.** Si  $b > 0$ , la courbe de niveau  $\{x \in \mathbb{R}^2 : L(x) = 0\}$  est de la forme de la figure 5.3. Les branches du demi-plan gauche étant infinies, on voit qu'une solution  $x(\cdot)$  associée à un soliton doit être contenue dans la boucle du demi-plan de droite. Il reste à montrer qu'il existe une solution parcourant l'ensemble de la boucle (privée de l'origine).

Soit  $v = (b, 0)$  le point d'intersection de la boucle avec l'axe horizontal et  $x(\cdot)$  la solution maximale issue de  $v$  en  $t = 0$ . Elle est définie sur tout  $\mathbb{R}$  (car contenue dans la boucle, qui est compacte). Puisque  $f(v) = (0, -b/2)$ , la demi-orbite  $x(]0, \infty[)$  est dans la partie de la boucle où  $x_2 < 0$  : la fonction  $x_1(t)$  y est ainsi décroissante et positive, elle admet donc une limite. De plus,  $x'_1(t)$  étant non nulle, sur cette partie de la boucle  $x_2(t)$  est fonction de  $x_1(t)$  et admet également une limite. Donc  $x(t)$  a une limite quand  $t \rightarrow \infty$  : cette limite étant forcément un équilibre (voir exercice 4.2) ce ne peut être que 0. Le même raisonnement s'applique quand  $t \rightarrow -\infty$ .

Ainsi,  $x(\cdot)$  est une solution qui tend vers 0 quand  $s \rightarrow \pm\infty$  (toutes les autres s'obtiennent à partir de celle-là par une translation du temps). Sa coordonnée  $x_1(s) = z(s)$  est alors un soliton. On sait de plus que son amplitude maximale, obtenue pour  $x_2 = 0$ , est égale à  $b$ .

En résumé, on a montré que, pour toute vitesse de propagation  $v$  telle que  $b > 0$ , c'est-à-dire

$$v > \sqrt{gh},$$

il existe un soliton dont l'amplitude maximale est

$$b = 2\left(v\sqrt{\frac{h}{g}} - h\right).$$

**Exercice 5.6 (non corrigé).**

On considère un modèle de dynamique de population de la forme :

$$\begin{cases} x'_1 = (1 - x_2 - 2x_1)x_1, \\ x'_2 = (x_1 - 1)x_2, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (5.10)$$

On note  $\phi_t$  le flot de cette équation différentielle.

1. Montrer que le quadrant positif  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$  est invariant (on dit qu'un ensemble  $U$  est *invariant* si toute solution  $x(\cdot)$  vérifiant  $x(0) \in U$  est incluse dans  $U$ ).
2. Déterminer les équilibres de (5.10) dans  $\mathbb{R}^2$  et étudier leur stabilité.
3. Déterminer les orbites stables non triviales de l'équilibre 0 et montrer qu'il n'y en a qu'une contenue dans  $Q$ .
4. Montrer que, pour tout  $A > 1$ , la région  $Q_A = \{x \in Q : x_1 \leq 1, x_2 \leq A\}$  est positivement invariante: si  $x \in Q_A$ ,  $\phi_t(x) \in Q_A$  pour tout  $t \geq 0$  tel que  $\phi_t(x)$  existe.
5. Montrer que, pour tout  $x \in Q$ , il existe un temps fini  $t_1 \in [0, \infty[$ , tel que  $\phi_{t_1}(x)$  appartient à l'ensemble  $Q_\infty = \{x \in Q : x_1 \leq 1\}$ .
6. En déduire que, si  $x \in Q$ ,  $\phi_t(x)$  est défini pour tout  $t \geq 0$ .
7. Montrer que toutes les solutions de (5.10) dans l'intérieur de  $Q$  qui ont une limite quand  $t \rightarrow +\infty$  convergent vers le même point.
8. Montrer que toutes les solutions de (5.10) dans  $Q$  ont une limite quand  $t \rightarrow +\infty$ . Dessiner le portrait de phase de l'équation dans  $Q$ .

**Exercice 5.7 (non corrigé).**

Considérons l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(1 - x_1 - 2x_2) \\ x'_2 = x_2(1 - 2x_1 - x_2) \end{cases}$$

1. Déterminer les équilibres de cette équation et étudier leur stabilité. Indiquer combien d'orbites stables possède chaque équilibre.
2. Supposons que, pour tout  $x \in (\mathbb{R}^+)^2$ ,  $\phi_t(x)$  existe pour tout  $t \geq 0$  et a une limite quand  $t \rightarrow \infty$ . Dessiner l'allure du portrait de phase dans  $(\mathbb{R}^+)^2$ .
3. Justifier l'hypothèse de la question précédente.

**Exercice 5.8 (non corrigé).**

On considère l'équation différentielle dans  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 - x_2^2, \\ x_2' = 2x_1x_2. \end{cases} \quad (5.11)$$

1. Trouver l'unique équilibre de (5.11) et étudier sa stabilité par linéarisation.
2. Montrer que si une solution  $x(t)$  est définie et admet une limite quand  $t \rightarrow \infty$  (ou  $t \rightarrow -\infty$ ), cette limite est l'équilibre de (5.11).

Pour tout réel  $a$ , on note  $C_a$  le cercle centré en  $(0, a)$  passant par l'origine,

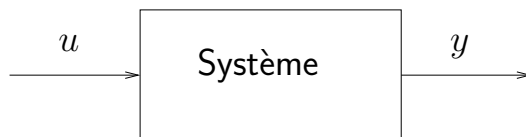
$$C_a = \{x \in \mathbb{R}^2 : V_a(x) = 0\}, \quad \text{où} \quad V_a(x) = x_1^2 + (x_2 - a)^2 - a^2.$$

3. a) Montrer que, si  $x(\cdot)$  est solution de (5.11), alors  $y(t) = V_a(x(t))$  est solution d'une équation différentielle de la forme  $y'(t) = \alpha(t)y(t)$   
b) En déduire que, si  $v \in C_a$ , alors l'orbite de  $v$  est contenue dans  $C_a$ .
4. Soient  $v = (v_1, v_2)$  tel que  $v_2 \neq 0$ , et  $a$  l'unique réel tel que  $v \in C_a$ .
  - a) Montrer que la solution maximale  $x_v(\cdot)$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$ .
  - b) Montrer que  $x_v(\cdot)$  a une limite en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
  - c) Quelle est l'orbite de  $v$ ?
5. Soit  $v = (v_1, 0)$ . Calculer  $x_v(\cdot)$  et donner son intervalle de définition.
6. Dessiner le portrait de phase de (5.11). L'équilibre est-il stable?
7. On définit  $\Omega$  comme  $\mathbb{R}^2$  privé de l'ensemble  $\{x = (x_1, 0) : x_1 \neq 0\}$ . Pour l'équation (5.11) restreinte à  $\Omega$ , l'équilibre est-il stable? Est-il asymptotiquement stable?

Les systèmes dynamiques que nous avons vu jusqu’à maintenant étaient des systèmes isolés : le comportement d’une solution est complètement déterminé par la donnée de sa condition initiale. Nous allons considérer maintenant des systèmes dont on peut modifier le comportement au cours du temps. Il s’agit des systèmes dits commandés, qui sont au cœur de l’automatique. Nous ne présentons ici qu’une introduction à ce domaine. On pourra se référer à [7] pour une présentation approfondie.

### 6.1 Systèmes commandés

L’objet de l’automatique est l’étude des systèmes sur lesquels on peut agir par le biais d’une commande, le système pouvant être un système mécanique (moteur, robot, drone, satellite), un processus chimique (réacteur, colonne de distillation), un circuit électrique ou électronique, un phénomène physique, etc. D’un tel système résulte une *relation entrée/sortie* où l’*entrée*  $u$  représente la commande, c’est-à-



dire le moyen d’action sur le système, et la *sortie*  $y$  représente ce que l’on observe du système, généralement sous la forme de mesures.

Le but de l’automaticien est double :

- analyser le comportement du système, que l’on connaît via la sortie  $y$ , en fonction de l’entrée  $u$  qu’on lui impose;

- synthétiser les lois de commande à imposer en entrée afin d'obtenir des comportements répondant à certaines spécifications.

Pour ce faire, la méthode la plus générale est d'utiliser une description interne du système, c'est-à-dire une modélisation mathématique du phénomène qu'il représente. Il s'agit de l'approche par *représentation d'état*.

Nous considérons donc que le système au temps  $t$  est décrit par son *état*  $x(t)$  et on modélise l'évolution du vecteur  $x(t)$  au cours du temps par un *système commandé*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ y(t) = g(t, x(t), u(t)). \end{cases}$$

Remarquons que nous avons fait ici un certain nombre d'hypothèses sur le système considéré, par exemple qu'il est *déterministe* (par opposition aux systèmes aléatoires, représentés par des équations différentielles stochastiques) et en temps continu (par opposition au temps discret). D'autre part, nous nous limiterons ici au cas où les grandeurs que nous considérons, l'état, l'entrée et la sortie, sont de dimension finie. Typiquement, pour chaque instant  $t$ ,  $x(t)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u(t)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$  et  $y(t)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ .

Précisons enfin la signification de l'équation  $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$ . Une fonction  $u(t)$ , définie sur un intervalle  $[0, \tau]$ , avec  $\tau > 0$ , est appelée une *loi de commande*. À une loi de commande  $u(\cdot)$  est associée une équation différentielle ordinaire

$$x'(t) = f_u(t, x(t)), \quad t \in [0, \tau], \quad (6.1)$$

où on a noté  $f_u(t, x) = f(t, x, u(t))$ . Ainsi, une fonction  $x(\cdot)$  est solution de l'équation différentielle commandée  $x'(t) = f(t, x(t), u(t))$  si il existe une loi de commande  $u(\cdot)$  telle que  $x(\cdot)$  est solution de l'équation différentielle  $x'(t) = f_u(t, x(t))$ . Nous y revenons dans la section 6.2.

Les premiers problèmes que l'on est amené à se poser en automatique portent d'une part sur l'analyse du comportement dynamique d'un système et d'autre part sur la synthèse de lois de commande. En ce qui concerne le premier point, les questions sont les suivantes :

**Commandabilité** Est-il possible de trouver une commande  $u(\cdot)$  qui amène le système, initialement dans l'état  $x(0)$ , dans un état  $v$  quelconque au temps  $t = \tau$ ?

**Observabilité** La connaissance de  $y(t)$  et de  $u(t)$  pour tout  $t \in [0, \tau]$  permet-elle de déterminer l'état  $x(\cdot)$  pour tout  $t \in [0, \tau]$  (ou, ce qui est équivalent, l'état initial  $x(0)$ )?

Pour la synthèse de lois de commande, les premières questions sont :



**Planification de trajectoires** Si la réponse à la question de la commandabilité est positive, comment trouver une commande  $u(\cdot)$  qui amène le système, initialement dans l'état  $x(0)$ , dans un état  $v$  donné au temps  $t = \tau$ ?

**Stabilisation** Comment construire une commande  $u(\cdot)$  (et est-ce possible?) qui *stabilise asymptotiquement* le système  $(\Sigma)$  autour d'un équilibre  $x_0$ , c'est-à-dire telle que, pour toutes conditions initiales  $x(0)$ , on ait

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 ?$$

À ces problèmes il faudrait ajouter celui de la **synthèse d'observateurs** : en cas de réponse positive à la question de l'observabilité, comment déterminer l'état  $x(\cdot)$  à partir de la connaissance de  $y(\cdot)$  et de  $u(\cdot)$ ? Nous aborderons cette question dans l'exercice 6.7.

Ces différentes questions n'ont pas de réponses dans un cadre général. Mais nous allons voir dans la section suivante qu'il est raisonnable, au moins localement, de se restreindre à des systèmes de commande linéaires. C'est donc dans ce cadre, celui de l'*automatique linéaire*, que nous traiterons ensuite les problèmes d'analyse et de synthèse de lois de commande.

## 6.2 Linéarisation des systèmes

Commençons par préciser ce qu'est une solution d'un système de commande. On considère donc une équation différentielle commandée

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad (6.2)$$

où l'état  $x(\cdot)$  est à valeurs dans un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , la commande  $u(\cdot)$  à valeurs dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  et  $f$  est une application continue de  $\Omega \times U$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Comme au chapitre 4, nous nous restreignons aux systèmes autonomes pour simplifier la présentation, la généralisation aux équations commandées dépendant du temps étant assez aisée.

Il est important de préciser à quelle classe de fonctions appartiennent les lois de commande  $u(\cdot)$ . En pratique, celles-ci peuvent en effet être extrêmement irrégulières, en particulier discontinues (par exemple, si l'action sur le système se fait au moyen d'un interrupteur). La classe choisie doit donc être suffisamment large pour représenter ces comportements, et en même temps permettre d'assurer l'existence de solutions de l'équation (6.1). Nous supposons donc qu'une loi de commande  $u(\cdot)$  est une fonction définie sur un intervalle  $[\sigma, \tau]$  (dépendant de  $u(\cdot)$ ) et à valeurs dans  $U$ , qui est *mesurable et essentiellement bornée*, c'est-à-dire dans l'espace  $L^\infty([\sigma, \tau], U)$ .

*Remarque 6.1.* L'introduction des espaces  $L^\infty$ , un peu abrupte, est nécessaire pour énoncer correctement les deux résultats à venir. Son utilisation se limite cependant à la présente section. De plus, le lecteur peu familier avec la théorie de la mesure peut suivre sans problème le reste de cette section en remplaçant l'espace  $L^\infty([\sigma, \tau], U)$  par celui des fonctions de  $[\sigma, \tau] \rightarrow U$  continues par morceaux.

Avec une telle classe de lois de commande, l'équation (6.1) ne rentre plus dans le cadre des équations étudiées au chapitre 4; en particulier,  $t \mapsto f(x, u(t))$  n'est a priori pas continue. Il nous faut donc redéfinir ce qu'est une solution d'une telle équation et donner un résultat qui généralise le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Fixons une loi de commande  $u(\cdot) \in L^\infty([\sigma, \tau], U)$ . On appelle solution de l'équation différentielle  $x'(t) = f(x(t), u(t))$  sur un sous-intervalle  $I$  de  $[\sigma, \tau]$ , une fonction  $x(\cdot) : I \rightarrow \Omega$  telle que

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s), u(s)) ds, \quad \text{pour tous } t, t_0 \in I.$$

En particulier, la solution  $x(\cdot)$  satisfait  $x'(t) = f(x(t), u(t))$  pour presque tout  $t \in I$ . D'autre part, comme au chapitre 4, on dit qu'une solution est maximale si elle n'admet pas de prolongement à un intervalle strictement plus grand (voir définition 4.1).

Avec ces définitions, on a la généralisation suivante du théorème de Cauchy-Lipschitz, dont on pourra trouver une preuve dans [8] ou [7, Lem. 2.6.2].

**Théorème 6.1 (d'existence et unicité des solutions maximales).** *Supposons  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\Omega \times U$  et fixons des données initiales  $v \in \Omega$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Alors, pour toute commande  $u(\cdot) \in L^\infty([t_0, \tau], U)$ , il existe une unique solution maximale  $x(\cdot)$  de  $x'(t) = f(x(t), u(t))$ , définie sur un intervalle  $I$  inclus dans  $[t_0, \tau]$  et contenant  $t_0$ , telle que*

$$x(t_0) = v.$$

Le système commandé étant autonome, on peut toujours se ramener par translation du temps à des intervalles de temps de la forme  $[0, \tau]$ . Pour un point  $v \in \Omega$  et une loi de commande  $u(\cdot) \in L^\infty([0, \tau], U)$ , on notera alors  $x_{v, u(\cdot)}(\cdot)$  la solution maximale de

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)), \\ x(0) = v. \end{cases}$$

On peut aussi définir une application généralisant la notion de flot : pour  $t \in [0, \tau]$ , on pose

$$\Phi_t(v, u(\cdot)) = x_{v, u(\cdot)}(t),$$

quand c'est possible, c'est-à-dire quand  $t$  appartient à l'intervalle de définition de  $x_{v, u(\cdot)}(\cdot)$  (cet intervalle étant de la forme  $[0, \tau']$ ,  $0 < \tau' \leq \tau$ ).

Une fois établi le résultat d'existence et d'unicité, on peut s'intéresser à la dépendance d'une solution par rapport d'une part aux conditions initiales et d'autre part à la loi de commande. Comme pour les équations différentielles ordinaires, cette dépendance s'obtient grâce au système linéarisé.

**Théorème 6.2.** *Supposons  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\Omega \times U$  et considérons une solution  $\bar{x}(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$  de (6.2) associée à la commande  $\bar{u}(\cdot) \in L^\infty([0, \tau], U)$ . On note  $\bar{v} = \bar{x}(0)$ .*

*Alors il existe un voisinage de  $(\bar{v}, \bar{u}(\cdot))$  dans  $\Omega \times L^\infty([0, \tau], U)$  sur lequel, pour tout temps  $t \in [0, \tau]$ , l'application  $\Phi_t$  est définie. De plus  $\Phi_t$  est de classe  $C^1$  sur ce voisinage et sa différentielle est :*

$$\forall (\delta v, \delta u(\cdot)) \in \mathbb{R}^n \times L^\infty([0, \tau], \mathbb{R}^m), \quad D\Phi_t(\bar{v}, \bar{u}(\cdot)) \cdot (\delta v, \delta u(\cdot)) = \delta x(t),$$

où  $\delta x(\cdot)$  est la solution de

$$\begin{cases} \delta x'(s) = D_x f(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \cdot \delta x(s) + D_u f(\bar{x}(s), \bar{u}(s)) \cdot \delta u(s), & s \in [0, \tau], \\ \delta x(0) = \delta v. \end{cases}$$

Rappelons que  $D_x f(x, u)$  désigne la différentielle partielle de  $f$  par rapport à  $x$ , c'est-à-dire la différentielle de l'application partielle  $x \mapsto f(x, u)$ ; de même  $D_u f(x, u)$  désigne la différentielle partielle de  $f$  par rapport à  $u$ .

Ce théorème apparaît comme une généralisation de la formule (4.7) sur les équations dépendant d'un paramètre et peut se prouver de façon similaire, avec cependant des difficultés techniques supplémentaires (voir par exemple [7, Th. 1] pour une preuve). Il montre que, autour d'une solution donnée, l'étude des solutions d'une équation différentielle commandée se ramène à l'étude d'une équation commandée linéaire. Introduisons alors la notion de système linéarisé.

**Définition 6.1.** *Soit  $\bar{x}(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow \Omega$  une solution de (6.2) associée à la commande  $\bar{u}(\cdot) \in L^\infty([0, \tau], U)$ . Le système linéaire*

$$\delta x'(t) = D_x f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \cdot \delta x(t) + D_u f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \cdot \delta u(t), \quad t \in [0, \tau]$$

où  $\delta x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état et  $\delta u(t) \in \mathbb{R}^m$  est la commande, est appelé système linéarisé de (6.2) autour de  $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ .

Un cas particulier très intéressant est celui où le système est linéarisé autour d'un couple d'équilibre, c'est-à-dire d'un couple  $(x_0, u_0)$  dans  $\Omega \times U$  tel que  $f(x_0, u_0) = 0$ . L'état  $x_0$  est alors une solution stationnaire de (6.2) associée à la commande constante  $u_0$  et le système linéarisé de (6.2) autour de  $(x_0, u_0)$  est linéaire et autonome, i.e. de la forme :

$$\delta x'(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t), \quad A = D_x f(x_0, u_0), \quad B = D_u f(x_0, u_0).$$

Si de plus le système a une sortie  $y(t) = g(x(t), u(t))$  avec  $g$  de classe  $C^1$ , le comportement de celle-ci au voisinage de  $y_0 = g(x_0, u_0)$  dépend du terme du premier ordre  $\delta y(t)$ , où

$$\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t), \quad C = D_x g(x_0, u_0), \quad D = D_u g(x_0, u_0).$$

Ainsi, quitte à linéariser autour d'un couple d'équilibre, **nous nous limiterons dans la suite à l'étude des systèmes commandés linéaires et autonomes**, soit

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad t \in [0, \tau],$$

où  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice carrée,  $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ,  $C \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathbb{M}_{p,m}(\mathbb{R})$  sont des matrices non nécessairement carrées et la commande  $u(\cdot)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ .

### 6.3 Commandabilité (relation entrée/état)

Soit un système commandé  $(\Sigma)$  linéaire et autonome. Seule nous intéresse ici la relation entre l'entrée et l'état, nous n'aurons donc besoin que de l'équation différentielle commandée dans  $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, \tau], \quad (6.3)$$

où  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  et la commande  $u(\cdot)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ .

Étant donné  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , on dit qu'un état  $v \in \mathbb{R}^n$  est *atteignable en temps  $\tau$*  à partir de  $x_0$  si il existe une loi de commande  $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que  $x(\tau) = v$ ,  $x(\cdot)$  étant la solution de (6.3) satisfaisant  $x(0) = x_0$ . On note  $\mathcal{A}(\tau, x_0)$  l'ensemble des états atteignables à partir de  $x_0$  en temps  $\tau$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{A}(\tau, x_0) = \left\{ x(\tau) : \begin{array}{l} x(\cdot) \text{ solution de } (\Sigma) \\ \text{t.q. } x(0) = x_0 \end{array} \right\}.$$

Le point de départ de l'étude des systèmes linéaires autonomes est la formule *de variation de la constante*, qui est une conséquence directe du théorème 3.3.

**Proposition 6.1.** *Soient  $u(\cdot)$  une commande et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . L'unique solution de  $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$  valant  $x_0$  à l'instant  $t = 0$  est*

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Notons en particulier que, si  $x(0) = 0$ ,

$$x(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds, \quad (6.4)$$

et que cette expression dépend linéairement de la loi de commande  $u(\cdot)$ .

Il résulte de cette proposition que l'ensemble  $\mathcal{A}(\tau, 0)$  est un espace vectoriel, et que l'ensemble  $\mathcal{A}(\tau, x_0)$  est l'espace affine  $e^{\tau A} x_0 + \mathcal{A}(\tau, 0)$ . L'ensemble des points atteignables à partir de  $x_0$  est donc complètement caractérisé par l'ensemble  $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{A}(\tau, 0)$ .

**Définition 6.2.** *On dit que le système  $(\Sigma)$  est commandable en temps  $\tau$  si  $\mathcal{A}_\tau = \mathbb{R}^n$ , ou, de façon équivalente, si tout état de  $\mathbb{R}^n$  est atteignable en temps  $\tau$  à partir de n'importe quel autre.*

Nous allons chercher maintenant à caractériser algébriquement la commandabilité. Ceci passe par la détermination de l'ensemble  $\mathcal{A}_\tau$ .

**Théorème 6.3.** *L'espace  $\mathcal{A}_\tau$  est égal à l'image de la matrice  $(n \times nm)$*

$$\mathcal{C} := [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B],$$

dite matrice de commandabilité.

*Remarque 6.2.* L'image de  $\mathcal{C}$  est l'espace vectoriel  $\mathcal{R}(A, B) \subset \mathbb{R}^n$  engendré par les  $A^i Bz$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $z \in \mathbb{R}^m$  :

$$\mathcal{R}(A, B) = \text{Vect}\{A^i Bz : i = 0, \dots, n-1, z \in \mathbb{R}^m\}.$$

La première conséquence de ce résultat est que  $\mathcal{A}_\tau$  est indépendant de  $\tau$ . Notons que ce ne serait évidemment pas le cas si nous avions choisi des commandes bornées. La deuxième conséquence est que la dimension de  $\mathcal{A}_\tau$  est égale au rang de la matrice de commandabilité. On obtient ainsi un critère de commandabilité algébrique, et donc en général facile à vérifier.

**Corollaire 6.1 (Critère de commandabilité de Kalman).** *Le système  $(\Sigma)$  est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est de rang  $n$ .*

**Démonstration du Théorème 6.3.** Montrons déjà que  $\mathcal{A}_\tau \subset \mathcal{R}(A, B)$ . Pour cela observons que, par définition, si  $v$  appartient à  $\mathcal{A}_\tau$  il existe une loi de commande  $u : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que

$$v = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B u(s) ds.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de  $A$  annule  $A$ . Or ce polynôme est un polynôme normalisé (*i.e.* dont le coefficient de plus haut degré égale 1) de degré

$n$ , ce qui implique que  $A^n$  est combinaison linéaire de  $I, \dots, A^{n-1}$ . Par conséquent, pour tout entier  $i \geq 0$ ,  $A^i$  est combinaison linéaire de  $I, \dots, A^{n-1}$  et laisse donc invariant l'espace vectoriel

$$\mathcal{R}(A, B) = \text{Vect}\{A^i Bz : i = 0, \dots, n-1, z \in \mathbb{R}^m\}.$$

D'autre part, pour tout  $s \in [0, \tau]$ , l'exponentielle  $e^{(\tau-s)A}$  admet le développement

$$e^{(\tau-s)A} = I + (\tau-s)A + \dots + \frac{(\tau-s)^k A^k}{k!} + \dots$$

L'exponentielle  $e^{(\tau-s)A}$  laisse donc également invariant l'espace  $\mathcal{R}(A, B)$ . Nous avons ainsi montré que  $e^{(\tau-s)A} B u(s) \in \mathcal{R}(A, B)$  pour tout  $s \in [0, \tau]$  et par conséquent

$$\int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B u(s) ds \in \mathcal{R}(A, B).$$

Ainsi  $\mathcal{A}_\tau \subset \mathcal{R}(A, B)$ .

▷ Montrons l'inclusion réciproque. Il suffit pour cela de démontrer  $\mathcal{A}_\tau^\perp \subset \mathcal{R}(A, B)^\perp$ . Soit donc  $w \in \mathbb{R}^n$  orthogonal à  $\mathcal{A}_\tau$ ; le vecteur  $w$  est ainsi orthogonal à l'état  $\tilde{w}$  que l'on peut atteindre au temps  $\tau$  par la commande

$$u(t) = B^T (e^{(\tau-s)A})^T w.$$

La formule (6.4) montre que

$$\tilde{w} = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B B^T (e^{(\tau-s)A})^T w ds,$$

et, puisque  $\langle \tilde{w}, w \rangle = 0$ , on obtient

$$0 = \langle w, \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B B^T (e^{(\tau-s)A})^T w ds \rangle = \int_0^\tau \left( (e^{(\tau-s)A} B)^T w \right)^T \left( (e^{(\tau-s)A} B)^T w \right) ds,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall s \in [0, \tau], (e^{(\tau-s)A} B)^T w = 0.$$

Dérivons une fois, puis deux fois, ... cette égalité par rapport à  $s$  : il vient successivement

$$(e^{(\tau-s)A} A B)^T w = 0, \quad (e^{(\tau-s)A} A^2 B)^T w = 0, \quad \dots \quad (e^{(\tau-s)A} A^{n-1} B)^T w = 0,$$

soit, pour  $s = \tau$ ,

$$B^T w = 0, \quad \dots \quad (A^{n-1} B)^T w = 0.$$

Ceci implique que, pour tout  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  et tout  $z \in \mathbb{R}^m$ ,

$$0 = \langle z, (A^j B)^T w \rangle = \langle A^j B z, w \rangle,$$

c'est-à-dire  $w \in \mathcal{R}(A, B)^\perp$ . L'inclusion  $\mathcal{R}(A, B) \subset \mathcal{A}_\tau$  est donc démontrée.  $\square$

### Planification de trajectoires

Le critère de Kalman nous permet de décider s'il est possible d'atteindre un état  $v \in \mathbb{R}^n$  quelconque en temps  $\tau$ . Le cas échéant, il est naturel de se demander *comment* atteindre  $v$ , c'est-à-dire comment exhiber une commande  $u_v(\cdot)$  qui amène de l'état 0 à l'instant 0 à l'état  $v$  à l'instant  $\tau$ . C'est le problème de la *planification des trajectoires*. Pour les systèmes linéaires et autonomes, ce problème se résout facilement à partir de la preuve du théorème précédent.

**Théorème 6.4.** Soit  $G$  la matrice de  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  définie comme

$$G = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B B^T (e^{(\tau-s)A})^T ds.$$

Alors

$$\text{Im } G = \mathcal{A}_\tau.$$

De plus, si  $(\Sigma)$  est commandable, alors  $G$  est bijective et la commande  $\bar{u}(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^m$  définie par

$$\bar{u}(s) = (e^{(\tau-s)A} B)^T G^{-1} v,$$

envoie l'état  $x(0) = 0$  au temps  $t = 0$  sur l'état  $x(\tau) = v$  au temps  $t = \tau$ .

**Démonstration.** Montrons déjà le premier point. Pour  $w \in \mathbb{R}^n$ ,

$$Gw = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B B^T (e^{(\tau-s)A})^T w ds = \int_0^\tau e^{(\tau-s)A} B u_w(s) ds,$$

où on a posé

$$u_w(s) = B^T (e^{(\tau-s)A})^T w. \quad (6.5)$$

La formule (6.4) montre alors que  $\text{Im } G$  est l'ensemble des états atteignables au temps  $\tau$  par des commandes de la forme (6.5). Mais dans la démonstration du théorème précédent, nous avons justement démontré que l'orthogonal de cet ensemble est inclus dans l'orthogonal de  $\mathcal{R}(A, B)$ . Par conséquent

$$\mathcal{R}(A, B) \subset \text{Im } G.$$

Mais  $\text{Im } G \subset \mathcal{A}_\tau$  et comme, d'après le théorème précédent,  $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{R}(A, B)$ , on a

$$\text{Im } G = \mathcal{R}(A, B).$$

▷ Le deuxième point est une conséquence de ce qui précède. □

La commande  $\bar{u}(\cdot)$  jouit en outre d'une propriété remarquable, celle de minimiser un coût.

**Théorème 6.5.** Si  $u(\cdot)$  est une commande permettant d'amener l'état  $x(0) = 0$  en  $t = 0$  à  $x(\tau) = v$  en  $t = \tau$  on a

$$\int_0^\tau \|u(s)\|^2 ds \geq \int_0^\tau \|\bar{u}(t)\|^2 ds.$$

En d'autres termes, la commande  $\bar{u}(\cdot)$  est celle qui minimise l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \|u(s)\|^2 ds.$$

Ce résultat est un premier pas en direction d'un domaine tenant à la fois de l'automatique et de l'optimisation, la *théorie de la commande optimale*. On trouvera une très bonne introduction en français à ce domaine dans [8].

**Démonstration.** Calculons

$$\begin{aligned} E(\bar{u} + (u - \bar{u})) &= E(\bar{u}) + \int_0^\tau \langle (e^{(\tau-s)A}B)^T G^{-1}v, u(s) - \bar{u}(s) \rangle ds + E(u - \bar{u}) \\ &= E(\bar{u}) + \int_0^\tau \langle G^{-1}v, e^{(\tau-s)A}B(u(s) - \bar{u}(s)) \rangle ds + E(u - \bar{u}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, les trajectoires associées aux commandes  $u(\cdot)$  et  $\bar{u}(\cdot)$  ayant les mêmes extrémités 0 et  $v$ , on a, d'après la proposition 6.1,

$$\int_0^\tau e^{(\tau-s)A}B(u(s) - \bar{u}(s))ds = 0;$$

par conséquent pour tout  $u$  du type considéré

$$E(u) \geq E(\bar{u}).$$

□

## 6.4 Observabilité (relation état/sortie)

Considérons à nouveau un système commandé linéaire autonome

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad t \in [0, \tau],$$

où  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ,  $C \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathbb{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ . Le problème de l'*observabilité* est le suivant : connaissant  $y(t)$  et  $u(t)$  pour tout  $t \in [0, \tau]$  ( $\tau > 0$ ), est-il possible de déterminer la condition initiale  $x(0)$ ?

Commençons par deux remarques :

- la connaissance de  $x(0)$  est équivalente à celle de  $x(t)$  pour tout  $t \in [0, \tau]$  puisque d'après la formule de variation de la constante, on a

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds,$$

le deuxième terme du membre de droite de l'égalité précédente étant supposé connu;

- on peut supposer  $D = 0$  et  $B = 0$  puisque l'on connaît  $u(\cdot)$ .

Il suffit donc d'étudier le problème de l'observabilité pour le système réduit

$$(\Sigma_0) : \quad \begin{cases} x'(t) = Ax(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad t \in [0, \tau],$$

c'est-à-dire que l'on se ramène à l'étude de  $y(t) = Ce^{tA}x_0$ .



Appelons *espace d'inobservabilité*  $\mathcal{I}_\tau$  du système  $(\Sigma_0)$  l'ensemble des conditions initiales  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  pour lesquelles la solution  $y(t)$  est identiquement nulle sur  $[0, \tau]$ , i.e.

$$\mathcal{I}_\tau = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} \text{la solution de } (\Sigma_0) \\ \text{avec } x(0) = x_0 \text{ vérifie } y(t) \equiv 0 \end{array} \right\}.$$

**Définition 6.3.** *Le système  $(\Sigma)$  est dit observable si l'espace d'inobservabilité de  $(\Sigma_0)$  est réduit à  $\{0\}$ .*

Le résultat élémentaire suivant montre que cette définition de l'observabilité correspond bien à la question que l'on s'était posée initialement.

**Proposition 6.2.** *Si le système  $(\Sigma)$  est observable, la connaissance de  $y(\cdot)$  sur  $[0, \tau]$  détermine de façon univoque  $x(0)$ .*

**Démonstration.** Si ce n'était pas le cas il existerait deux vecteurs distincts  $x_0$  et  $\tilde{x}_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  tels que

$$Ce^{tA}x_0 = Ce^{tA}\tilde{x}_0,$$

ce qui entraînerait  $Ce^{tA}(x_0 - \tilde{x}_0) = 0$ , c'est-à-dire  $x_0 - \tilde{x}_0 \in \mathcal{I}_\tau$ . D'après la définition de l'observabilité, ceci implique  $x_0 = \tilde{x}_0$ .  $\square$

Il existe un critère très simple permettant de déterminer si un système est observable.

**Théorème 6.6 (Critère d'observabilité de Kalman).** *L'espace d'inobservabilité du système  $(\Sigma_0)$  est le noyau de la matrice  $(np \times n)$*

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

*Autrement dit, le système  $(\Sigma)$  est observable si et seulement si  $\ker \mathcal{O} = \{0\}$ .*

**Démonstration.** D'après le théorème de Cayley-Hamilton (c'est un argument que nous avons déjà utilisé dans la démonstration du théorème 6.3), pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,

$$Ce^{tA} \in \text{Vect}(C, CA, \dots, CA^{n-1}).$$

Par conséquent, si

$$CA^j v = 0, \quad j = 0, \dots, n-1, \tag{6.6}$$

on a  $Ce^{tA}v = 0$ , c'est-à-dire que  $v$  est dans l'espace d'inobservabilité de  $(\Sigma_0)$ . Mais la condition (6.6) est équivalente au fait que  $v \in \ker \mathcal{O}$ . Nous avons donc démontré que  $\ker \mathcal{O}$  est inclus dans l'espace d'inobservabilité de  $(\Sigma_0)$ .

▷ Réciproquement, supposons que pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $Ce^{tA}v = 0$ . Alors, en dérivant  $j$  fois l'égalité précédente en  $t = 0$  ( $0 \leq j \leq n - 1$ ), il vient

$$\forall 0 \leq j \leq n - 1, CA^j v = 0,$$

ce qui signifie que  $v \in \ker \mathcal{O}$ . L'inclusion réciproque est démontrée.  $\square$

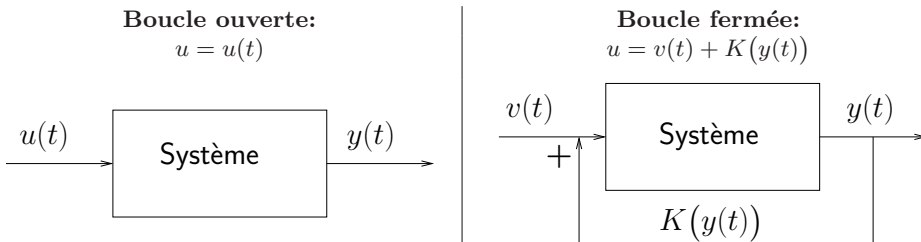
*Remarque 6.3.* Si l'on compare le théorème précédent avec le théorème 6.3 on s'aperçoit que le système  $(\Sigma)$  est observable si et seulement si le système dual

$$(\tilde{\Sigma}) : \quad z'(t) = A^T z(t) + C^T u(t)$$

est commandable (prendre la transposée de la matrice  $\mathcal{O}$ ).

## 6.5 Stabilisation

Nous avons utilisé jusqu'à maintenant des lois de commande  $u(t)$  dépendant uniquement du temps. C'est ce que l'on appelle de la *commande en boucle ouverte* : la loi de commande est fixée au départ, à  $t = 0$ , et est appliquée indépendamment du comportement du système. En particulier le problème de la planification de trajectoires, dont la solution est donnée par le théorème 6.4, se pose en terme de commande en boucle ouverte. Les limitations de ce type de loi de commande sont cependant assez évidentes : la moindre erreur sur les données (la condition initiale par exemple) ne pourra être prise en compte. Par exemple une commande en boucle ouverte sur une voiture donnerait ceci : pour suivre une ligne droite, positionnez vos roues dans l'axe, tenez bien votre volant, et fermez les yeux... Pour réguler le système, il faut faire appel à un autre type de loi de commande  $u(t) = v(t) + K(y(t))$ , dite *commande en boucle fermée*, qui tient compte à tout moment de l'information disponible en sortie pour déterminer la commande.



Généralement, les commandes en boucle fermée que l'on utilise dépendent directement de l'état du système :  $u(t) = v(t) + K(x(t))$ . On parle alors de commande *par retour d'état*. Notez que ces lois ont aussi leur inconvénient : elles nécessitent la connaissance de l'état  $x(t)$ , ce qui peut être impossible, ou très coûteux.

Intéressons-nous maintenant au problème de la stabilisation d'un système commandé  $(\Sigma)$  : le but est de construire une loi de commande par retour d'état qui amène le système à l'origine, quel que soit le point de départ. Comme dans les sections précédentes, nous nous plaçons dans le cadre des systèmes linéaires autonomes, et on suppose l'état connu à tout instant (*i.e.*  $y = x$ ). Autrement dit,  $(\Sigma)$  se réduit à l'équation différentielle commandée

$$(\Sigma) : \quad x'(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (6.7)$$

**Définition 6.4.** *Le système commandé  $(\Sigma)$  est dit asymptotiquement stabilisable par retour d'état s'il existe une loi de commande  $u(t) = K(x(t))$  telle que l'origine soit un équilibre globalement asymptotiquement stable de l'équation différentielle*

$$x'(t) = Ax(t) + BK(x(t)),$$

*appelée équation ou système bouclé. Autrement dit, toute solution  $x(t)$  de cette équation bouclée tend vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$  indépendamment de la condition initiale (voir chapitre 5).*

Nous allons chercher le retour d'état sous la forme d'une fonction linéaire de l'état, c'est-à-dire  $u(t) = Kx(t)$  avec  $K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  (une telle loi est appelée *loi proportionnelle*). Dans ce cas, l'équation différentielle dont il faut montrer la stabilité asymptotique est

$$x'(t) = Ax(t) + BKx(t) = (A + BK)x(t).$$

Or nous savons (proposition 5.1) qu'une telle équation différentielle admet 0 pour équilibre asymptotiquement stable si et seulement si la matrice  $A+BK$  a toutes ses valeurs propres de parties réelles strictement négatives. Existe-t-il  $K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $A+BK$  satisfasse cette condition? Le résultat d'algèbre linéaire suivant, dont nous donnons la démonstration en annexe en B.4 permet de répondre à cette question.

**Théorème 6.7 (de placement des pôles).** *Si  $A, B$  satisfait le critère de Kalman, alors, pour tout réel  $\rho$ , il existe une matrice  $K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  telle que toute valeur propre de  $A + BK$  a une partie réelle inférieure à  $\rho$ .*

Par conséquent, si un système  $(\Sigma)$  est commandable, il existe une matrice  $K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  telle que toutes les valeurs propres de  $A + BK$  ont une partie réelle négative.

**Corollaire 6.2.** *Si le système  $(\Sigma)$  est commandable, il est asymptotiquement stabilisable par retour d'état proportionnel.*

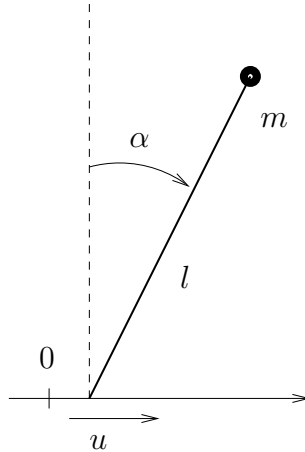
## 6.6 Exercices corrigés

### Exercice 6.1 (Stabilisation d'un pendule inversé).

On s'intéresse au problème de stabilisation d'un pendule unidimensionnel autour de son équilibre instable, par exemple un balai dans un plan posé sur le manche. On agit sur le balai en déplaçant son point de contact le long d'une droite, l'axe  $Oz$ . En supposant que notre commande est l'accélération  $u$  de ce point de contact, la dynamique du balai est régie par l'équation suivante :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{g}{l} \sin \alpha - \frac{1}{l^2}u,$$

où  $\alpha$  est l'angle du balai avec la verticale.



1. Écrire l'équation du mouvement comme un système de commande (préciser son entrée et son état).
2. Linéariser le système autour de l'équilibre correspondant à la position verticale : ( $\alpha = 0, u = 0$ ). Vérifier que, en l'absence de commande, cet équilibre n'est pas stable pour le système non linéaire.
3. Montrer que le système linéarisé est commandable.
4. Proposer un retour d'état proportionnel qui permet de stabiliser asymptotiquement le système linéarisé. Peut-on également stabiliser asymptotiquement le système d'origine?

5. On suppose maintenant que seule la mesure de  $\alpha$  est disponible. Le système linéarisé est-il observable ? Est-il stabilisable asymptotiquement par un retour de sortie (de la forme  $\delta u = k\delta\alpha$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ) ? Est-il stabilisable ?

### Corrigé de l'exercice 6.1.

1. En prenant pour état  $x = (\alpha, \alpha')$  et pour commande  $u$ , on obtient

$$x'(t) = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \frac{g}{l} \sin \alpha - \frac{1}{l^2} u \end{pmatrix} = f(x, u).$$

2. L'équilibre correspondant à  $(\alpha = 0, u = 0)$  est  $(x = 0, u = 0)$ . L'équation linéarisée autour de cet équilibre est donc :

$$\delta x'(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t),$$

où

$$A = D_x f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = D_u f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l^2} \end{pmatrix}.$$

Le système sans commande est le système autonome  $x' = f(x, 0)$ , dont le linéarisé en 0 est  $\delta x' = A\delta x$ . Puisque  $A$  a une valeur propre positive (ses valeurs propres sont  $\pm\sqrt{\frac{g}{l}}$ ), l'équilibre n'est pas stable.

3. La matrice de commandabilité  $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{l^2} \\ -\frac{1}{l^2} & 0 \end{pmatrix}$  est de rang 2, le système est donc commandable.

4. Prenons une commande par retour d'état  $\delta u(t) = K\delta x(t)$ , avec  $K = (k_1 \ k_2)$ . Les solutions associées à ce type de commande sont les solutions de l'équation différentielle

$$\delta x'(t) = (A + BK)\delta x(t), \quad A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} - \frac{k_1}{l^2} & -\frac{k_2}{l^2} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $A + BK$  sont les solutions de

$$P_{A+BK}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k_2}{l^2}\lambda + \frac{k_1}{l^2} - \frac{g}{l} = 0.$$

En choisissant  $k_1$  et  $k_2$  on peut obtenir n'importe quelles valeurs pour les coefficients de ce polynôme, c'est-à-dire que l'on peut obtenir n'importe quelles valeurs pour les valeurs propres  $\lambda$ . Par exemple, on peut choisir

$$k_1 = l^2 + gl, \quad k_2 = 2l^2,$$

et donc  $-1$  comme valeur propre double de  $A + BK$ . L'équilibre  $0$  est alors asymptotiquement stable pour l'équation linéaire  $\delta x'(t) = (A + BK)\delta x(t)$ .

Si on applique maintenant une commande  $u = Kx$  au système d'origine, on obtient l'équation différentielle bouclée  $x' = f(x, Kx)$ , dont le linéarisé en  $0$  est  $\delta x' = (A + BK)\delta x$ . Cette dernière étant asymptotiquement stable, l'équation bouclée est elle-aussi asymptotiquement stable.

**5.** On rajoute maintenant au système linéarisé une observation :

$$\delta \alpha(t) = C\delta x(t), \quad \text{où } C = (1 \ 0).$$

La matrice d'observabilité est  $\mathcal{O} = I_2$ , le système est donc observable.

Prenons une commande par retour de sortie  $\delta u(t) = k_1\delta \alpha(t) = KC\delta x(t)$ , où  $K = (k_1 \ 0)$ . Les solutions associées à ce type de commande sont les solutions de l'équation différentielle  $\delta x'(t) = (A + BKC)\delta x(t)$ . Les valeurs propres de  $A + BKC$  sont les racines du polynôme

$$P_{A+BKC}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k_1}{l^2} - \frac{g}{l}.$$

Il est impossible d'avoir deux valeurs propres de partie réelle  $< 0$ . Le système n'est donc pas stabilisable asymptotiquement. En revanche on peut obtenir deux valeurs propres complexes conjuguées de partie réelle nulle, par exemple  $\pm i$  (il suffit de prendre  $k_1 = l^2 + gl$ ). Les solutions de  $\delta x'(t) = (A + BKC)\delta x(t)$  sont alors de la forme

$$\delta x(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \delta x(0),$$

l'équilibre  $0$  est donc stable pour cette équation linéaire.

*Remarque 6.4.* Dans ce dernier cas, le balai oscille autour de sa position d'équilibre, sans amortissement des oscillations. Cela correspond à ce que peut faire un « actionneur » humain, qui peut évaluer à vue d'œil  $\alpha$  mais pas  $\alpha'$ .

**Exercice 6.2.** La position d'un train sur une voie est repérée par sa position  $x(t)$  et son accélération est commandée par la relation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u. \tag{6.8}$$

**1.** Écrire l'équation (6.8) sous la forme d'un système de commande

$$X' = AX + Bu.$$

**2.** Montrer que le système est commandable.

3. Montrer qu'en se restreignant à des commandes  $u(t) = \pm 1$  constantes par morceaux, le système reste commandable.

### Corrigé de l'exercice 6.2.

1. En prenant pour état  $X = (x, x')$ , on obtient

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t).$$

2. La matrice de commandabilité  $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est de rang 2, le système est donc commandable.

3. À partir d'un point  $X_0 = (x_0, x'_0) \in \mathbb{R}^2$ , la trajectoire du système associée à la loi de commande  $u \equiv +1$  a pour équation  $x'' = 1$ , c'est-à-dire  $x'x'' = x'$ , et en intégrant

$$\frac{1}{2}(x'(t))^2 - x_0'^2 = x(t) - x_0.$$

De même, l'équation de la trajectoire associée à la loi de commande  $u \equiv -1$  est

$$\frac{1}{2}(x'(t))^2 - x_0'^2 = -x(t) + x_0.$$

Les orbites des ces deux trajectoires sont des paraboles couchées orientées en sens inverse (voir la figure 6.1).

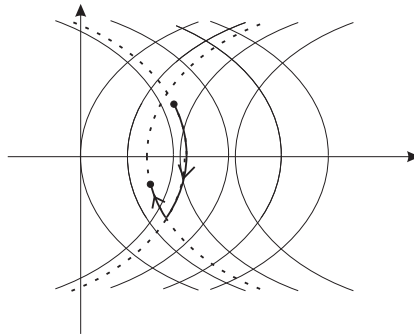
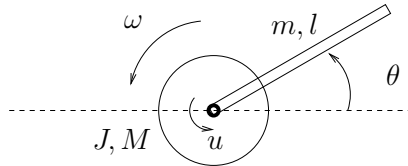


Fig. 6.1. Trajectoires dans le plan de phase

Donnons-nous maintenant un autre point  $X_1$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Il est clair que l'une des paraboles issues de  $X_0$  doit couper l'une des paraboles issues de  $X_1$  : il suffit alors de suivre les trajectoires correspondantes pour obtenir une solution amenant le système de l'état  $X_0$  à l'état  $X_1$ . Le système est donc commandable.

**Exercice 6.3.** On modélise un satellite en orbite par un système plan composé d'une roue à inertie de masse  $M$  et de moment d'inertie  $J$ , et d'une barre rigide de masse  $m$  et de longueur  $l$ . La barre symbolise un télescope que l'on désire aligner sur une étoile fixe. À l'aide d'un moteur, la roue à inertie peut appliquer sur l'extrémité fixe de la barre un couple  $u$ , permettant ainsi de commander le système. On désigne par  $\theta$  l'angle que fait la barre par rapport à une direction fixe, et par  $\omega$  la vitesse angulaire de la roue à inertie. On ne mesure que  $\theta$ . Les équations régissant la dynamique du système sont

$$\theta'' = \frac{u}{ml^2}, \quad \omega' = -\frac{u}{J}.$$



**Fig. 6.2.** Satellite avec télescope

1. Préciser l'état, l'entrée et la sortie et écrire le système commandé associé.
2. Montrer que ce système n'est ni commandable, ni observable.
3. Montrer qu'il existe une constante du mouvement (c'est-à-dire une fonction constante le long de toute solution du système).
4. En déduire que l'ensemble des états atteignables à partir d'une condition initiale donnée, en temps quelconque, est un espace affine dont on donnera l'équation.

### Corrigé de l'exercice 6.3.

1. L'état est  $x = (\theta, \theta', \omega)$ , la sortie  $y = \theta$  et l'entrée  $u$ , ce qui donne le système de commande suivant :

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + u \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \\ -\frac{1}{J} \end{pmatrix}, \quad y = (1 \ 0 \ 0) x.$$

2. La matrice de commandabilité est

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} & 0 \\ \frac{1}{ml^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Elle est de rang 2, donc le système n'est pas commandable. D'autre part la matrice d'observabilité est

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est de rang 2, donc le système n'est pas observable.

**3.** Le moment cinétique  $\xi = J\omega + ml^2\theta'$  reste constant le long de toute solution puisque  $\frac{d\xi}{dt}\xi(t) = 0$ .

**4.** Faisons le changement de coordonnées linéaire  $(\theta, \theta', \xi) = Px$ , où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & ml^2 & J \end{pmatrix}.$$

Dans ces coordonnées, le système de commande satisfait

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{pmatrix}, \quad \xi' = 0.$$

Le système de commande en  $(\theta, \theta')$  est commandable, la matrice de commandabilité associée étant de rang 2. L'ensemble des points atteignables à partir d'une condition initiale  $(\theta_0, \theta'_0, \xi_0)$  est donc l'espace affine d'équation  $\{\xi = \xi_0\}$ . Remarquons que le système réduit en  $(\theta, \theta')$  est également observable.

**Exercice 6.4.** On considère le système de commande dans  $\mathbb{R}^3$

$$x'(t) = Ax(t) + bu(t),$$

où  $u(\cdot)$  est une commande à valeurs réelles,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & a & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

le paramètre  $a$  étant un réel. On a vu dans l'exercice 2.3 que 0 n'est jamais un équilibre asymptotiquement stable pour  $A$ .

**1.** Montrer que le système n'est pas commandable et donner l'équation de  $\mathcal{A}(\tau, 0)$ , l'ensemble atteignable en temps  $\tau$  à partir de 0. Peut-on savoir *a priori* si le système est asymptotiquement stabilisable par retour d'état proportionnel?

**2.** Proposer des coordonnées  $y = Px$  dans lesquelles  $\mathcal{A}(\tau, 0)$  a pour équation  $y_3 = 0$  et écrire le système dans les coordonnées  $y$ .

**3.** Montrer que le système est asymptotiquement stabilisable par un retour d'état proportionnel de la forme  $u = K \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ .

**4.** Quelle est l'équation dans les coordonnées  $y$  de  $\mathcal{A}(\tau, v)$ , l'ensemble atteignable en temps  $\tau$  à partir d'un point  $v$ ?

**Corrigé de l'exercice 6.4.**

**1.** La matrice de commandabilité

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

est de rang 2, donc le système n'est pas commandable. De plus,  $\mathcal{A}(\tau, 0) = \text{Im } C$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{A}(\tau, 0) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0\}.$$

Le seul résultat connu est que, si le système est commandable, alors il est stabilisable par retour d'état proportionnel. Comme le système n'est pas commandable, on ne peut rien dire a priori.

**2.** Il suffit de choisir des coordonnées  $y = Px$  telles que  $y_3 = x_1 + x_3$ , par exemple

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_1 + x_3.$$

Dans ces coordonnées, le système s'écrit :

$$\begin{aligned} y'_1 &= x'_1 = -ay_2 + y_3 + u, \\ y'_2 &= x'_2 = y_1, \\ y'_3 &= x'_1 + x'_3 = -y_3, \end{aligned}$$

ou encore  $y' = \bar{A}y + u\bar{b}$ , où

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{b} = Pb = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**3.** On réécrit le système par blocs :

$$y' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y + u \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $A_1 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $A_2 \in \mathbb{M}_{1,2}(\mathbb{R})$  et  $b_1 \in \mathbb{R}^2$ . De plus, on vérifie aisément que le système dans  $\mathbb{R}^2$  associé à  $A_1$  et  $b_1$  est commandable. Il existe donc une matrice  $K \in \mathbb{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  telle que  $A_1 + Kb_1$  n'a que des valeurs propres négatives. Appliquons alors le retour d'état  $u = K \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  sur le système précédent, on obtient l'équation différentielle linéaire

$$y' = \begin{pmatrix} A_1 + Kb_1 & A_2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y,$$

dont la matrice n'a que des valeurs propres négatives. Le système est donc asymptotiquement stabilisé par ce retour d'état.

Il s'agit en fait d'un résultat général : si les modes non commandables (ici la coordonnée  $y_3$ ) correspondent à des valeurs propres à partie réelle négative, alors le système est stabilisable par retour d'état.

4. Soit  $w = Pv$  les coordonnées de  $v$ . En coordonnées  $y$ , la formule de variation de la constante permet d'écrire :

$$\mathcal{A}(\tau, v) = e^{\tau \bar{A}} w + \mathcal{A}(\tau, 0).$$

Puisque  $\mathcal{A}(\tau, 0) = \{y_3 = 0\}$ , on a

$$\mathcal{A}(\tau, v) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 = (e^{\tau \bar{A}} w)_3\}.$$

Vue la forme de  $\bar{A}$ , on a clairement  $(e^{\tau \bar{A}} w)_3 = e^{-\tau} w_3$ , et donc

$$\mathcal{A}(\tau, v) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_3 = e^{-\tau} w_3\}.$$

**Exercice 6.5.** On considère un système de commande

$$x'(t) = Ax(t) + u(t)b,$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $u(t) \in \mathbb{R}$ .

1. Soit  $k \leq n$  le rang de la matrice de commandabilité  $\mathcal{C}$ . Montrer que les  $k$  premières colonnes de la matrice  $\mathcal{C}$  sont linéairement indépendantes.

2. Montrer qu'il existe une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix},$$

où  $A_1 \in \mathbb{M}_k(\mathbb{R})$  et  $\bar{b} \in \mathbb{R}^k$  vérifient le critère de commandabilité de Kalman.

3. Donner, dans les coordonnées  $y = P^{-1}x$ , l'équation de l'ensemble des points atteignables à partir de 0 en temps quelconque.

**Corrigé de l'exercice 6.5.**

1. Soit  $\mathcal{C} = (b \ Ab \cdots A^{n-1}b)$  la matrice de commandabilité. Si, pour un entier  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $A^i b$  est combinaison linéaire de  $b, \dots, A^{i-1}b$ , alors  $A^{i+1}b$  aussi, ainsi que tout  $A^j b$  pour  $j \geq i$ . La matrice  $\mathcal{C}$  étant de rang  $k$ , ceci implique que  $b, \dots, A^{k-1}b$  sont linéairement indépendants.

2. Soient  $b_{k+1}, \dots, b_n$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  qui complètent  $b, \dots, A^{k-1}b$  en une base de  $\mathbb{R}^n$  et notons  $P$  la matrice de  $GL_n(\mathbb{R})$  dont les vecteurs colonnes sont  $b, \dots, A^{k-1}b, b_{k+1}, \dots, b_n$ . On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}b = \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & a_k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de commandabilité du système réduit correspondant à  $(A_1, \bar{b})$  est  $(\bar{b} \cdots A_1^{k-1}\bar{b}) = I_k$ . Elle satisfait donc le critère de Kalman.

3. Dans les coordonnées  $y$ , que l'on écrit  $y = (\bar{y}, z)$  avec  $\bar{y} \in \mathbb{R}^k$  et  $z \in \mathbb{R}^{n-k}$ , le système s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{y}' &= A_1 \bar{y} + A_3 z + u \bar{b}, \\ z' &= A_3 z. \end{aligned}$$

On appelle  $z$  la partie *ingouvernable* (ou non commandable) du système. À partir de la condition initiale  $y(0) = 0$ , on obtient directement  $z(\cdot) \equiv 0$  et  $y(\cdot)$  est solution du système commandable

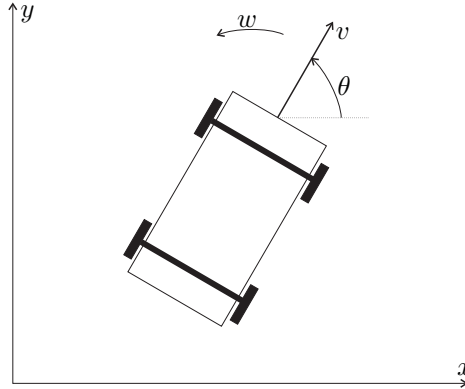
$$\bar{y}' = A_1 \bar{y} + u \bar{b}.$$

L'ensemble des points atteignables à partir de 0 est donc le sous-espace vectoriel  $\{z = 0\}$  de dimension  $k$ .

**Exercice 6.6.** Une voiture commandée en vitesse est modélisée de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ w \end{bmatrix}$$

où les commandes  $v$  et  $w$  sont les vitesses linéaires et angulaires (voir figure 6.3).



**Fig. 6.3.** Modèle de la voiture

1. Montrer que le système est commandable, par exemple par des commandes constantes par morceaux  $(v, w) = (0, \pm 1)$  ou  $(\pm 1, 0)$ .
2. Écrire le linéarisé du système autour d'une trajectoire  $X(t) = (x, y, \theta)(t)$  correspondant à une commande  $(v(t), w(t))$ .
3. Le linéarisé autour d'une trajectoire correspondant à  $(v, w) \equiv (0, 0)$  est-il commandable?
4. Même question pour le linéarisé autour d'une trajectoire correspondant à  $(v, w) \equiv (v_0, 0)$ , où  $v_0$  est une constante non nulle.

### Corrigé de l'exercice 6.6.

1. Il suffit de montrer que l'on peut amener la voiture de l'origine à une configuration  $(x, y, \theta)$  quelconque. Or ceci peut être réalisé par la commande suivante :
  - faire pivoter la voiture jusqu'à ce que son axe pointe vers  $(x, y)$ , à l'aide d'une commande  $(v, w) = (0, \pm 1)$ ;
  - amener la voiture en ligne droite jusqu'à la position  $(x, y)$ , en utilisant la commande  $(v, w) = (1, 0)$ ;
  - refaire pivoter la voiture jusqu'à ce qu'elle soit orientée selon l'angle  $\theta$ , à l'aide d'une commande  $(v, w) = (0, \pm 1)$ .
2. L'équation commandée s'écrit  $X'(t) = f(X(t), u(t))$ , où  $X = (x, y, \theta)$ ,  $u = (v, w)$  et

$$f(X, u) = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ w \end{bmatrix}.$$

L'équation linéarisée autour d'une solution  $X(\cdot)$  associée à une commande  $u(\cdot)$  est

$$\delta X'(t) = A(t)\delta X(t) + B(t)\delta u(t),$$

où

$$A(t) = D_X f(X(t), u(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -v(t) \sin \theta(t) \\ 0 & 0 & v(t) \cos \theta(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = D_u f(X(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**3.** Quand  $u(\cdot) \equiv 0$ , la solution  $X(\cdot)$  satisfait  $\theta' = 0$ , c'est-à-dire  $\theta(\cdot) \equiv \theta(0)$ . Les fonctions matricielles  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  sont maintenant constantes :  $A(\cdot) \equiv 0$  et  $B(\cdot) = B_0$ .

Le système linéarisé s'écrit donc  $\delta X'(t) = B_0 \delta u(t)$  et n'est pas commandable, car le critère de Kalman n'est pas satisfait :  $\text{rang } \mathcal{C} = \text{rang } B_0 = 2 < 3$ .

**4.** Toute solution  $X(\cdot)$  associée au contrôle  $(v, w) \equiv (v_0, 0)$  satisfait  $x(t) = tv_0 \cos \theta(0) + x(0)$ ,  $y(\cdot) = tv_0 \sin \theta(0) + y(0)$  et  $\theta(\cdot) \equiv \theta(0)$ . Les fonctions matricielles  $A(\cdot)$  et  $B(\cdot)$  sont encore une fois constantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -v_0 \sin \theta(0) \\ 0 & 0 & v_0 \cos \theta(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta(0) & 0 \\ \sin \theta(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En revanche le critère de Kalman est satisfait, le système est donc commandable.

### Exercice 6.7 (Observateur asymptotique).

Soit un système de commande

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

où  $x(\cdot)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $y(\cdot)$  dans  $\mathbb{R}^p$  et  $u(\cdot)$  dans  $\mathbb{R}^m$  (et donc  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  et  $C \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ ). On suppose ce système observable.

On considère un second système, appelé *observateur*,

$$\begin{cases} \hat{x}'(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - K(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

où  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $K \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , qui est couplé au précédent : l'entrée  $(u(\cdot), y(\cdot))$  de l'observateur est constituée de l'entrée et de la sortie du système  $(\Sigma)$ .

Le but de l'exercice est de montrer que l'on peut choisir l'observateur de telle sorte que son état  $\hat{x}(t)$  approxime l'état  $x(t)$  de  $(\Sigma)$ .

1. Donner l'équation différentielle satisfaite par l'erreur  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ .
2. Montrer que le système dual,

$$x'(t) = A^T x(t) + C^T v(t),$$

est commandable (l'entrée  $v(\cdot)$  est ici à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ ).

3. Montrer que l'on peut choisir la matrice  $K$  de telle sorte que  $e(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ . On montrera de plus que,  $\rho > 0$  étant fixé, on peut choisir  $K$  de telle sorte que  $\|e(t)\|/e^{-\rho t} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

### Corrigé de l'exercice 6.7.

1. Puisque  $e'(t) = x'(t) - \hat{x}'(t)$ , on obtient

$$e'(t) = (A + KC)e(t).$$

2. La matrice de commandabilité du système dual est

$$[C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T],$$

et est égale à  $\mathcal{O}^T$ , où  $\mathcal{O}$  est la matrice d'observabilité de  $(\Sigma)$ . Cette matrice  $\mathcal{O}$  étant de rang  $n$  (le système  $(\Sigma)$  est observable),  $\mathcal{O}^T$  aussi et le système dual est commandable.

3. Il suffit de montrer que l'on peut choisir  $K$  tel que les valeurs propres de  $A + KC$  soient toutes négatives et inférieures à  $-\rho - 1$  : on aura alors  $\|e(t)\| \leq C\|e(0)\|e^{-(\rho+1)t}$  d'après le théorème 2.8, c'est-à-dire  $\|e(t)\|/e^{-\rho t} \rightarrow 0$ . Or les valeurs propres de  $A + KC$  sont également celles de  $A^T + C^T K^T$  auxquelles on peut donner les valeurs que l'on veut en choisissant bien  $K$  puisque le système dual est commandable (voir le théorème 6.7).

**Exercice 6.8.** Considérons le système de commande dans  $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, \infty[, \quad (6.9)$$

où les lois de commande  $u : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^m$  sont choisies bornées. On suppose que toutes les valeurs propres de  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$  sont de partie réelle strictement négative (on peut toujours faire cette hypothèse quand le système est commandable, quitte à introduire une composante de retour d'état dans les commandes).

1. Montrer que, si  $x(\cdot)$  est une solution de (6.9) associée à un contrôle  $u(\cdot)$ , alors  $\|x(t) - x^u(t)\| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , où

$$x^u(t) = \int_0^\infty e^{sA} Bu(t-s) ds.$$

Une telle fonction est appelée *régime stationnaire*.

**2.** Prenons  $u(t) = \sin(\omega t)e_j$  ( $e_j$  est le  $j$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ ). Calculer le régime stationnaire associé et montrer qu'il est de la forme

$$x^u(t) = \begin{pmatrix} a_1(\omega) \sin(\omega t + \theta_1(\omega)) \\ \vdots \\ a_n(\omega) \sin(\omega t + \theta_n(\omega)) \end{pmatrix}.$$

Relaxons les hypothèses sur  $A$  : on suppose maintenant que toutes les solutions de  $x'(t) = Ax(t)$  sont bornées pour  $t \in \mathbb{R}^+$ .

**3.** Prenons par exemple un système (6.9) avec  $n = 2$ ,  $m = 1$  et une matrice  $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  de valeurs propres  $\lambda = i\alpha$  et  $\bar{\lambda} = -i\alpha$ . Les solutions de ce système associées à une commande sinusoïdale  $u(t) = \sin(\omega t)$  sont-elles bornées (discuter selon la valeur de  $\omega$ )?

**4.** Plus généralement, pour une matrice  $A$  vérifiant l'hypothèse ci-dessus, à quelle condition les solutions de (6.9) associées à une commande  $u(t) = \sin(\omega t)e_j$  sont-elles toutes bornées?

### Corrigé de l'exercice 6.8.

**1.** Toute solution du système associée à  $u(\cdot)$  satisfait

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds \\ &= e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{\tau A}Bu(t-\tau)d\tau \\ &= e^{tA}x(0) + \int_t^\infty e^{\tau A}Bu(t-\tau)d\tau + \int_0^\infty e^{\tau A}Bu(t-\tau)d\tau, \end{aligned}$$

où on a prolongé  $u$  en une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  en posant  $u(t) = 0$  pour  $t < 0$ . Puisque  $e^{tA}$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$  et que  $u$  est bornée, on a bien  $\|x(t) - x^u(t)\| \rightarrow 0$ .

**2.** On va calculer le régime stationnaire correspondant à  $u(t) = e^{i\omega t}e_j$ , il suffira ensuite de prendre la partie imaginaire. On a

$$\begin{aligned} x^u(t) &= \int_0^\infty e^{sA}Be^{i\omega(t-s)}e_j ds = e^{i\omega t} \int_0^\infty e^{s(A-i\omega I)}b_j ds \\ &= e^{i\omega t}(i\omega I - A)^{-1}b_j, \end{aligned}$$

$b_j$  étant la  $j$ -ème colonne de la matrice  $B$ . Ceci peut se réécrire

$$x^u(t) = e^{i\omega t}F_j(i\omega),$$



où  $F_j(i\omega) = (i\omega I - A)^{-1}b_j$ . En écrivant

$$F_j(i\omega) = \begin{pmatrix} a_1(\omega)e^{i\theta_1(\omega)} \\ \vdots \\ a_n(\omega)e^{i\theta_n(\omega)} \end{pmatrix},$$

puis en prenant la partie réelle de  $x^u(t)$ , on obtient la conclusion.

*Remarque 6.5.* La matrice  $F(i\omega)$  dont les vecteurs colonnes sont les  $F_j(i\omega)$  est appelée *matrice de réponse en fréquence*. Elle joue un grand rôle dans l'approche fréquentielle de l'automatique. Dans ce cadre les fonctions  $a_i(\omega)$  sont appelées *réponses en amplitude* et les fonctions  $\theta_i(\omega)$  *décalages de phase*.

**3.** Comme dans la question précédente, on prend une commande complexe,  $u(t) = e^{i\omega t}$  (la partie imaginaire de la solution correspondante est la solution associée à la commande  $u(t) = \sin(\omega t)$ ). Les solutions du système de commande associées à cette loi de commande sont de la forme :

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{sA}bu(t-s)ds = e^{tA}x(0) + e^{i\omega t} \int_0^t e^{s(A-i\omega I)}b ds.$$

Vues les hypothèses sur  $A$ , le terme  $e^{tA}x(0)$  est toujours borné. Intéressons-nous à l'autre, que l'on note  $J$ .

Si  $\omega \neq \alpha$ , la matrice  $A - i\omega I$  est inversible et on a donc

$$J = e^{i\omega t}(A - i\omega I)^{-1}(e^{t(A-i\omega I)} - I)b.$$

Les valeurs propres de  $(A - i\omega I)$  sont  $i(\pm\alpha - \omega)$  : l'exponentielle  $e^{t(A-i\omega I)}$  est donc bornée, ainsi que  $J$ .

Si  $\omega = \alpha$ , les valeurs propres de la matrice  $A - i\omega I$  sont 0 et  $-2i\alpha$ . Écrivons alors  $\mathbb{C}^2$  comme la somme directe  $\ker(A - i\omega I) \oplus \ker(A + i\omega I)$  et  $b = b_1 + b_2$  dans cette décomposition. On a donc

$$e^{s(A-i\omega I)}b = b_1 + e^{-2is\alpha}b_2,$$

ce qui implique

$$J = te^{i\alpha t}b_1 - \frac{e^{i\alpha t}}{2i\alpha}(e^{-2i\alpha t} - 1)b_2.$$

Si  $b_1 \neq 0$ , ce terme  $J$  est non borné quand  $t \rightarrow +\infty$ . Les solutions  $x(t)$  sont donc également non bornées, et ce indépendamment de leur condition initiale  $x(0)$ . C'est le phénomène classique de *résonance*.

4. Vu les hypothèses, les valeurs propres de la matrice  $A$  sont soit de partie réelle  $< 0$ , soit de partie réelle nulle et dans ce cas multiplicités algébriques et géométriques coïncident. Si toutes les valeurs propres sont nulles ou de partie réelle  $< 0$ , toutes les solutions sont bornées. Sinon, il existe au moins une paire de valeurs propres  $\pm i\alpha$  et on est ramené à l'analyse de la question précédente.

**Exercice 6.9 (non corrigé).**

Rappelons une conséquence du théorème 6.4: si le système

$$x' = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

est commandable, alors pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$  il existe un *unique* contrôle  $u_w(\cdot)$  de la forme

$$u_w(s) = B^T \left( e^{A(\tau-s)} \right)^T w, \quad s \in [0, \tau],$$

avec  $|w| \leq C|v|$ , qui amène de l'état  $x(0) = 0$  à l'état  $x(\tau) = v$ .

Notons  $B_n(0, 1)$  la boule de  $\mathbb{R}^n$  de centre 0 et de rayon 1 et considérons une application de classe  $C^1$

$$f : B_n(0, 1) \times B_m(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u) \longmapsto f(x, u),$$

telle que  $f(0, 0) = 0$ . On pose

$$\begin{cases} A = D_x f(0, 0) \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}), \\ B = D_u f(0, 0) \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R}). \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $|w| \leq \delta$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x, u_w), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (6.10)$$

admet une solution unique sur  $[0, \tau]$ .

2. Notons  $\phi$  l'application :

$$\begin{aligned} \{w \in \mathbb{R}^n, |w| \leq \delta\} &\longrightarrow C^0([0, \tau], \mathbb{R}^n) \\ w &\longmapsto \text{la solution de (6.10)}. \end{aligned}$$

Montrer que  $\phi$  est de classe  $C^1$  et calculer  $D\phi(w = 0)$ .

3. Montrer que si la paire  $(A, B)$  est commandable alors il existe un  $\tilde{\delta} > 0$  tel que pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $|v| \leq \tilde{\delta}$  il existe un contrôle  $u_w(s)$  défini sur  $[0, \tau]$  tel que la solution de (6.10) vérifie  $x(\tau) = v$ .

4. En déduire le résultat suivant.

Soit un système  $\dot{x} = f(x, u)$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f(0, 0) = 0$ . Si le linéarisé autour de la solution identiquement nulle est commandable, alors le système est commandable dans un voisinage de 0.

**Exercice 6.10 (non corrigé).**

Le mouvement d'un satellite autour de son centre de gravité est régi par les équations d'Euler :

$$\begin{cases} J_1 \omega'_1 = (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 + u_1, \\ J_2 \omega'_2 = (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 + u_2, \\ J_3 \omega'_3 = (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 + u_3, \end{cases} \quad (6.11)$$

où  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  est la vitesse angulaire,  $J_1, J_2, J_3$  sont les moments principaux d'inertie et  $u = (u_1, u_2, u_3)$  les couples exercés par les moteurs.

1. Supposons  $u \equiv 0$ . Montrer que l'origine  $\omega = 0$  est un équilibre stable mais pas asymptotiquement stable (on pourra chercher une constante du mouvement).

2. On choisit maintenant un contrôle par retour d'état de la forme  $u_i = -k_i \omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , où chaque  $k_i$  est un réel  $> 0$ . Montrer que l'origine est un équilibre globalement asymptotiquement stable (c'est-à-dire que son bassin d'attraction est  $\mathbb{R}^3$  tout entier).

**Exercice 6.11 (non corrigé).**

On considère le système commandé dans  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - x_2, \\ x'_2 = (x_1 - x_2)(1 - 2 \cos x_1) + \sin(2x_1) - u \cos x_2, \end{cases}$$

le contrôle  $u(\cdot)$  étant à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

1. Supposons d'abord  $u \equiv 0$ . Montrer que  $x = 0$  est un équilibre de l'équation différentielle ainsi obtenue et étudier sa stabilité.

2. Montrer que le linéarisé du système autour de l'équilibre ( $x = 0, u = 0$ ) est :

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 - y_2, \\ y'_2 = y_1 + y_2 - v, \end{cases} \quad (6.12)$$

où  $y$  est l'état et  $v$  est le contrôle.

Dans la suite de l'exercice, on se restreint à l'étude du système linéarisé (6.12).

3. Montrer qu'il est possible de stabiliser (6.12) au moyen d'un retour d'état proportionnel.

Supposons maintenant que la sortie du système est  $y_2$ .

4. Avec cette sortie, le système (6.12) est-il observable?
5. On utilise une commande de la forme  $v = ky_2$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ .
  - a) Existe-t-il une valeur de  $k$  pour laquelle l'origine est un équilibre asymptotiquement stable ou, à défaut, stable?
  - b) On suppose  $k \geq 0$ . En fonction de la valeur de  $k$ , donner l'allure du portrait de phase en justifiant le dessin.

# A

---

## Espaces vectoriels normés et théorèmes du point fixe

Nous rassemblons dans ce chapitre divers rappels sur les espaces vectoriels normés et leur topologie, ainsi que sur le théorème du point fixe de Picard et ses conséquences. Pour ce dernier résultat, et pour les notions basiques de topologie, nous nous plaçons dans le cadre des espaces métriques, que nous introduisons maintenant.

### A.1 Topologie des espaces métriques

Un *espace métrique*  $(A, d)$  est un ensemble  $A$  muni d'une *distance*  $d$ , c'est-à-dire d'une fonction  $d : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui est symétrique, qui vérifie l'inégalité triangulaire, et qui est telle que  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ .

Rappelons les premières notions de topologie sur un espace métrique  $(A, d)$ .

- *Boule*: la boule ouverte  $B(x_0, r)$  de centre  $x_0 \in A$  et de rayon  $r > 0$  est l'ensemble des  $v \in A$  tels que  $d(v, x_0) < r$ .
- *Ouvert*: un ouvert  $U$  de  $A$  est un ensemble tel que, pour tout point  $x_0 \in U$ , il est possible de trouver un  $r > 0$  dépendant de  $x_0$  et une boule  $B(x_0, r)$  incluse dans  $U$ . On appelle *topologie associée à  $d$*  l'ensemble de tous les ouverts de  $A$ .
- *Continuité*: une application  $f$  entre deux espaces métriques  $(A, d)$  et  $(A', d')$  est continue si la pré-image  $f^{-1}(U)$  de tout ouvert  $U$  de  $(A', d')$  est un ouvert de  $(A, d)$ ; de façon équivalente,  $f$  est continue si  $d(f(a), f(b)) \rightarrow 0$  quand  $d(a, b) \rightarrow 0$ .

Introduisons enfin la notion importante d'espace complet; c'est dans ce type d'espace que l'on peut obtenir des théorèmes de point fixe.

**Définition A.1.** *Un espace métrique  $(A, d)$  est dit complet si toute suite de Cauchy  $a_n$  de  $A$  vérifiant par définition*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, d(a_n, a_m) < \varepsilon,$$

converge vers un  $a \in A$ .

## A.2 Espaces vectoriels normés

Une classe importante d'espaces métriques est celle des espaces vectoriels normés. Un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ) est dit *normé* s'il existe une application  $\|\cdot\|_E : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (i) pour tous  $v, w \in E$  on a  $\|v + w\|_E \leq \|v\|_E + \|w\|_E$ ;
- (ii) pour tout  $v \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  (resp.  $\mathbb{C}$ ),  $\|\lambda v\|_E = |\lambda| \|v\|_E$ ;
- (iii) pour  $v \in E$  l'égalité  $\|v\|_E = 0$  est équivalente à  $v = 0$ .

Nous dirons alors que  $\|\cdot\|_E$  est une norme et que  $(E, \|\cdot\|_E)$  est un *espace vectoriel normé*.

Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes que l'on peut y définir sont *équivalentes* : si  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  sont deux normes sur  $E$ , il existe une constante  $C > 0$  pour laquelle

$$\forall v \in E, \quad C^{-1} \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C \|v\|_1.$$

### Topologie

Un espace vectoriel normé est naturellement muni d'une distance,

$$d_E(v, w) = \|v - w\|_E.$$

Il hérite donc de la topologie de l'espace métrique  $(E, d_E)$ . Il est clair que deux normes équivalentes définissent la même topologie (c'est-à-dire la même famille d'ouverts). Ainsi, sur un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, toutes les normes induisent la même topologie. Il sera inutile en général dans ce cas de préciser la norme que l'on utilise.

On appelle *espace de Banach* un espace vectoriel normé  $E$  tel que l'espace métrique  $(E, d_E)$  est complet.

### Norme d'opérateur

Quand  $f$  est une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés  $E$  et  $F$ , la continuité de  $f$  est équivalente au fait qu'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que, pour tout  $v \in E$ ,

$$\|f(v)\|_F \leq C \|v\|_E.$$

Dans ce cas, l'ensemble des  $C \geq 0$  pour lesquels l'inégalité précédente est satisfaite admet un minimum qui s'appelle la *norme d'opérateur* de  $f$ , que nous noterons  $\|f\|_{E,F}$  ou  $\|f\|_{L_c(E,F)}$  ou encore (noter l'ambiguïté de la notation)  $\|f\|$ . Il est facile de voir que

$$\|f\| = \sup_{\substack{v \in E \\ v \neq 0}} \frac{\|f(v)\|_F}{\|v\|_E} \quad \text{et} \quad \|f(v)\|_F \leq \|f\| \|v\|_E.$$

Si  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie, toute application linéaire sur  $E$  est continue. En particulier, la norme d'opérateur est bien définie pour de telles applications linéaires.

### Espaces produits

Si  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  sont deux espaces vectoriels normés, l'espace produit  $E \times F$  des couples  $(u, v)$ ,  $u \in E, v \in F$  muni de la norme

$$\|(u, v)\| = \|(u, v)\|_{E \times F} = \|u\|_E + \|v\|_F,$$

(vérifier que c'en est une) est un espace vectoriel normé. En fait les normes suivantes sont toutes équivalentes (vérifiez-le) :

$$\begin{aligned} \|(u, v)\| &= \|u\|_E + \|v\|_F, \\ \|(u, v)\| &= \max(\|u\|_E, \|v\|_F), \\ \|(u, v)\| &= (\|u\|_E^p + \|v\|_F^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (p \geq 1). \end{aligned}$$

## A.3 Théorèmes du Point Fixe

Soient  $(A, d)$  et  $(A', d')$  deux espaces métriques.

**Définition A.2.** Soit  $k \geq 0$  un réel. Nous dirons qu'une application  $\phi : A \rightarrow A'$  est *k-lipschitzienne* si, pour tous points  $x, y \in A$ ,

$$d'(\phi(x), \phi(y)) \leq k d(x, y).$$

Une application  $\phi : A \rightarrow A$  est dite *contractante* si elle est *k-lipschitzienne* pour un certain  $k < 1$ .

Une application lipschitzienne est donc continue. Dans les applications que nous aurons à traiter,  $A$  sera souvent un ensemble fermé d'un espace vectoriel normé  $E$  muni de la distance

$$d_E(x, y) = \|x - y\|_E.$$

Une application  $k$ -lipschitzienne  $\phi : A \rightarrow A$  vérifie alors

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_E \leq k \|x - y\|_E,$$

mais  $\phi$  n'est pas nécessairement linéaire.

**Théorème A.1 (du point fixe de Picard).** *Soit  $(A, d)$  un espace métrique complet et  $\phi : A \rightarrow A$  une application contractante. Alors  $\phi$  admet un unique point fixe  $x \in A$  (i.e.  $\phi(x) = x$ ). Pour tout  $x_0 \in A$ , la suite  $\phi^i(x_0)$  converge vers  $x$ .*

**Démonstration.** Soit  $\phi : A \rightarrow A$  une application contractante, c'est-à-dire  $\rho$ -lipschitzienne avec  $0 \leq \rho < 1$ . Montrons déjà l'unicité par l'absurde : si  $\phi(x_1) = x_1, \phi(x_2) = x_2$  on a

$$d(x_1, x_2) = d(\phi(x_1), \phi(x_2)) \leq \rho d(x_1, x_2),$$

ce qui entraîne, vu que  $\rho < 1$ ,  $d(x_1, x_2) = 0$ .

▷ Montrons à présent l'existence. Choisissons  $x_0 \in A$  et posons  $x_k = \phi^k(x)$  (où  $\phi^k$  désigne l'itéré  $k$ -ème de  $\phi$ ). Le fait que  $\phi$  soit  $\rho$ -contractante montre que, pour  $k \geq 1$ ,

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(\phi(x_k), \phi(x_{k-1})) \leq \rho d(x_k, x_{k-1}),$$

et par conséquent, en itérant cette inégalité,

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \rho^k d(x_1, x_0).$$

L'inégalité triangulaire assure donc que, pour tout  $p \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} d(x_{k+p}, x_k) &\leq \sum_{j=1}^p d(x_{k+j}, x_{k+j-1}) \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^p \rho^{k+j-1} \right) d(x_1, x_0) \\ &\leq \rho^k \frac{1 - \rho^p}{1 - \rho} d(x_1, x_0) \\ &\leq \rho^k \frac{d(x_1, x_0)}{1 - \rho}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy. L'espace étant complet, la suite  $(x_k)$  converge donc vers un point  $x \in A$ . En faisant  $k \rightarrow \infty$  dans l'identité  $\phi(x_k) = x_{k+1}$  on obtient  $\phi(x) = x$ , c'est-à-dire l'existence du point fixe et également la dernière partie du théorème.  $\square$

Il existe aussi une version du théorème du point fixe à paramètre qui nous sera utile dans la prochaine section.

**Théorème A.2.** *Soient  $A$  un espace complet,  $\Lambda$  un espace métrique (non nécessairement complet) et  $0 \leq \rho < 1$ . Supposons que  $\phi : A \times \Lambda \rightarrow A$  soit une application continue et que, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , l'application  $\phi(\cdot, \lambda) : A \rightarrow A$  soit  $\rho$ -contractante. Alors, pour tout  $\lambda \in \Lambda$  il existe un unique point fixe  $x(\lambda)$  de  $\phi(\cdot, \lambda)$  et l'application  $x(\cdot) : \Lambda \rightarrow A$  est continue.*



**Démonstration.** Définissons  $\mathcal{E}$  comme étant l'ensemble des fonctions continues de  $\Lambda$  dans  $A$ . Muni de la norme de la convergence uniforme  $\|\cdot\|_{C^0}$ , c'est un espace complet.

▷ Définissons alors  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  par  $f(x(\cdot)) = \phi(x(\cdot), \cdot)$  : c'est une application  $\rho$ -contractante (c'est pratiquement immédiat, vue la définition de la norme  $\|\cdot\|_{C^0}$ ). Le théorème s'applique donc et fournit une unique application  $x(\cdot)$  telle que  $f(x(\cdot)) = x(\cdot)$ , c'est-à-dire, du fait de la définition de  $f$ , la conclusion recherchée.  $\square$

Si l'on veut obtenir des résultats sur la dépendance  $C^k$  par rapport au paramètre, il faut faire des hypothèses de différentiabilité sur  $\phi$ . Cependant dans ce cadre il est plus simple d'utiliser le théorème des fonctions implicites (voir la section 1.4), dont nous donnons la preuve dans la section suivante.

## A.4 Conséquence pour l'inversion locale et les fonctions implicites

Cette section est consacrée à la preuve des théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites. Nous allons les établir dans le cadre des espaces de Banach. Dans ce contexte,  $L_c(E, F)$  désigne l'ensemble des applications linéaires et continues entre les espaces de Banach  $E$  et  $F$  et la notion de différentiabilité est celle donnée dans la définition 1.6.

Rappelons d'autre part un résultat important (mais difficile), le théorème de Banach (voir [1, ch.II]) : *si  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach et si  $f \in L_c(E, F)$  est bijective, alors sa réciproque  $f^{-1}$  appartient à  $L_c(F, E)$* . On dit dans ce cas que  $f$  est inversible ou encore que  $f$  est un isomorphisme. En dimension finie, on retrouve les notions habituelles d'inversibilité puisque toute application linéaire est continue.

**Théorème A.3 (d'inversion locale).** *Soient  $E, F$  deux espaces de Banach et  $f : E \rightarrow F$  une application de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) sur un voisinage de  $a \in E$ . On suppose que  $Df(a) \in L_c(E, F)$  est bijective.*

*Alors il existe un ouvert  $V \subset E$  contenant  $a$  et un ouvert  $W \subset F$  contenant  $f(a)$ , tels que  $f$  est une bijection de  $V$  dans  $W = f(V)$  dont l'inverse  $f^{-1} : W \rightarrow V$  est de classe  $C^k$ . Autrement dit,  $f$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de  $V$  dans  $W$  (voir la définition 1.4).*

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin d'un premier résultat reliant les notions d'homéomorphisme et de difféomorphisme.

**Proposition A.1.** *Un homéomorphisme  $f : U \rightarrow V$  est un  $C^k$ -difféomorphisme si et seulement si  $f$  est de classe  $C^k$  et, pour tout  $x \in U$ ,  $Df(x) \in L_c(E, F)$  est bijective.*

**Démonstration.** Notons d'abord qu'une des implications est immédiate : si  $f$  est un  $C^k$ -difféomorphisme, alors par définition  $f$  est un homéomorphisme de classe  $C^k$  et, comme nous l'avons déjà vu (remarque 1.4, point 3),  $Df(x)$  est bijective pour tout  $x$ . Il nous reste à montrer l'implication réciproque. Soit donc  $f$  un homéomorphisme de classe  $C^k$  tel que  $Df(x)$  est bijective pour tout  $x$ .

Pour  $y = f(x) \in V$  et  $h \in F$  suffisamment petit, posons  $x_h = f^{-1}(y + h)$ . On a alors  $h = f(x_h) - f(x) = Df(x) \cdot (x_h - x) + o(\|x_h - x\|)$ , et donc

$$f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y) = x_h - x = (Df(x))^{-1} \cdot h - (Df(x))^{-1} \cdot o(\|x_h - x\|). \quad (\text{A.1})$$

Montrons d'abord que cette expression implique que  $f^{-1}$  est différentiable, de différentielle égale à  $(Df(x))^{-1}$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $(Df(x))^{-1} \cdot o(\|x_h - x\|)$  est un  $o(\|h\|)$  puisque  $(Df(x))^{-1}$  appartient à  $L_c(F, E)$ .

Notons d'abord que, comme  $x_h$  tend vers  $x$  quand  $h$  tend vers 0 (puisque  $f^{-1}$  est continue) et comme  $\|(Df(x))^{-1}\|^{-1}$  est un réel positif, on a, pour  $h$  suffisamment petit,

$$\frac{\|o(\|x_h - x\|)\|}{\|x_h - x\|} \leq \frac{1}{2} \|(Df(x))^{-1}\|^{-1}.$$

Prenons la norme de l'égalité (A.1) et utilisons la majoration ci-dessus :

$$\begin{aligned} \|x_h - x\| &\leq \|(Df(x))^{-1}\| \|h\| + \|(Df(x))^{-1}\| \|o(\|x_h - x\|)\| \\ &\leq \|(Df(x))^{-1}\| \|h\| + \frac{1}{2} \|x_h - x\|. \end{aligned}$$

Au total,

$$\|x_h - x\| \leq 2\|(Df(x))^{-1}\| \|h\|,$$

ce qui implique qu'un  $o(\|x_h - x\|)$  est aussi un  $o(\|h\|)$ . Il résulte alors de l'égalité (A.1) que

$$f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y) = (Df(x))^{-1} \cdot h + o(\|h\|),$$

c'est-à-dire que  $f^{-1}$  est différentiable en  $y$  et que

$$Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1} = [Df \circ f^{-1}(y)]^{-1}.$$

Comme  $Df$  est de classe  $C^{k-1}$ , cette dernière égalité établit, en utilisant le théorème de composition et le fait que l'inverse d'une application  $C^l$  est  $C^l$ , que  $f^{-1}$  est de classe  $C^k$ . □

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le théorème d'inversion locale.

**Démonstration du théorème A.3.** Notons  $b = f(a)$ . Puisque  $[Df(a)]^{-1}$  existe,  $f$  réalisera un  $C^k$ -difféomorphisme d'un voisinage de  $a$  sur un voisinage de  $b$  si et seulement si l'application  $f_0(\cdot)$ , définie par

$$f_0(u) = Df(a)^{-1} \cdot (f(a + u) - b),$$

réalise un  $C^k$ -difféomorphisme d'un voisinage de  $0 \in E$  sur un voisinage de  $0 \in E$ . Remarquons que  $f_0$  est de classe  $C^k$  et que l'on a

$$f_0(0) = 0, \quad Df_0(0) = \text{Id}.$$

▷ Posons alors pour  $u, v$  dans un voisinage de  $0 \in E$ ,

$$\tilde{f}_v(u) = v + (u - f_0(u)),$$

et observons que  $f_0(u) = v$  si et seulement si  $\tilde{f}_v(u) = u$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\tilde{f}_v$  admet  $u$  pour point fixe. Vérifions donc que  $\tilde{f}_v$  est contractante dans un voisinage de 0 pour  $v$  suffisamment petit. Soient  $\delta > 0$  suffisamment petit et  $u_1, u_2$  dans la boule fermée  $B_f(0, \delta)$  de centre 0 et de rayon  $\delta$  :

$$\|\tilde{f}_v(u_1) - \tilde{f}_v(u_2)\| = \|(\text{id} - f_0)(u_1) - (\text{id} - f_0)(u_2)\|,$$

et, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\|(\text{id} - f_0)(u_1) - (\text{id} - f_0)(u_2)\| \leq \sup_{w \in B_f(0, \delta)} \|D(\text{id} - f_0)\| \|u_1 - u_2\|;$$

mais comme  $Df_0(\cdot)$  est continue sur un voisinage de 0 et que  $Df_0(0) = \text{Id}$  on a, pourvu que  $\delta$  soit assez petit,

$$\sup_{w \in B_f(0, \delta)} \|D(\text{id} - f_0)(w)\| \leq \frac{1}{2},$$

et l'application  $\tilde{f}_v$  est  $\frac{1}{2}$ -contractante sur  $B_f(0, \delta)$ . On a en particulier (faire  $u_2 = 0$ )

$$\|\tilde{f}_v(u_1) - v\| \leq \frac{1}{2}\|u_1\|,$$

et donc

$$\|\tilde{f}_v(u_1)\| \leq \|v\| + \frac{1}{2}\delta,$$

ce qui prouve que si  $\|v\| \leq \delta/2$ ,  $\tilde{f}_v$  envoie  $B_f(0, \delta)$  dans elle-même. Les conditions d'application du théorème du point fixe sont vérifiées et  $\tilde{f}_v$  admet donc un unique point fixe  $u_v$  dans  $B_f(0, \delta)$ . En outre, comme  $\tilde{f}_v(\cdot)$  est continue en  $v$ , les hypothèses du théorème du point fixe à paramètre sont vérifiées et on en déduit que l'unique point fixe  $u_v$  obtenu précédemment dépend continûment de  $v$ .

▷ Tout ceci montre que  $f_0$  réalise un homéomorphisme d'un voisinage de  $0 \in E$  sur un voisinage de  $0 \in E$ . D'après la proposition A.1,  $f_0$  est donc un  $C^k$ -difféomorphisme d'un voisinage de  $0 \in E$  sur un voisinage de  $0 \in E$ , ce qui prouve que  $f$  est un  $C^k$ -difféomorphisme d'un voisinage de  $a$  sur un voisinage de  $b$ .  $\square$

Le théorème des fonctions implicites s'obtient comme un corollaire du théorème d'inversion locale. Rappelons d'abord son énoncé.

**Théorème A.4 (des fonctions implicites).** *Soient  $E, F$  et  $G$  des espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $E \times F$ , et  $f : U \subset E \times F \rightarrow G$  une application de classe  $C^k$ . Supposons que  $f$  vérifie  $f(a, b) = 0$  et que  $D_y f(a, b) \in L_c(F, G)$  soit bijective. Alors il existe  $V \subset E$  (voisinage ouvert de  $a$ ),  $W \subset F$  (voisinage ouvert de  $b$ ), avec  $V \times W \subset U$ , et une application  $\varphi : V \rightarrow W$  de classe  $C^k$ , unique, telle que*

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \iff (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)).$$

**Démonstration.** On applique le théorème d'inversion locale à l'application  $C^k$  définie sur un voisinage de  $(a, b) \in E \times F$  par  $\phi(x, y) = (x, f(x, y))$ , qui prend ses valeurs dans un voisinage de  $(a, 0) \in E \times G$ . Calculons sa différentielle  $D\phi(a, b) \in L_c(E \times F, E \times G)$  en  $(a, b)$ . Pour tout  $(\delta x, \delta y) \in E \times F$ , en utilisant une notation matricielle, on a

$$D\phi(a, b) \cdot (\delta x, \delta y) = \begin{pmatrix} \text{Id}_E & 0 \\ D_x f(a, b) & D_y f(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix},$$

qui a une forme triangulaire et qui est inversible puisque par hypothèse  $D_y f(a, b) \in L_c(F, G)$  l'est. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale :  $\phi$  réalise un difféomorphisme de classe  $C^k$  d'un voisinage de  $(a, b)$  dans un voisinage de  $(a, 0)$  et, vue la forme de  $\phi$ , le difféomorphisme inverse  $\phi^{-1}$  est de la forme

$$\phi^{-1}(x, z) = (x, g(x, z)),$$

où  $g$  est de classe  $C^k$  d'un voisinage de 0 à valeurs dans un voisinage de  $b$ . On a donc

$$(x, y) = \left( x, g(x, f(x, y)) \right),$$

pour tout  $(x, y)$  dans un voisinage de  $(a, b)$  et par conséquent, pour  $(x, y)$  dans ce voisinage,

$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x, 0).$$

Ceci termine la preuve du théorème des fonctions implicites. □

## B

---

### Formes normales des systèmes commandables

Le but de cette annexe est de donner des formes normales pour les systèmes linéaires autonomes, c'est-à-dire des systèmes particuliers auxquels on peut se ramener moyennant un changement linéaire de coordonnées. L'intérêt de ces formes normales est qu'elles permettent de traiter de façon très efficace le problème de la stabilisation (section 6.5). On verra en particulier la preuve du théorème 6.7.

L'idée directrice est de se ramener à des systèmes scalaires d'ordre  $n$  où la commande est justement la dérivée d'ordre le plus élevé. Nous commençons donc par donner une caractérisation des équations différentielles d'ordre  $n$ .

#### B.1 Équations différentielles scalaires d'ordre $n$

Une classe particulière d'équations différentielles est celle issue des équations scalaires d'ordre supérieur à un. Dans le cas linéaire autonome, une équation scalaire d'ordre  $n$ , où  $n$  est un entier supérieur à 1, s'écrit

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \quad (\text{B.1})$$

où  $y(\cdot)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . L'équation différentielle associée est l'équation linéaire suivante sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$x' = A_a x, \quad A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix},$$

obtenue en choisissant comme état  $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . Le polynôme caractéristique de la matrice  $A_a$  est très facile à calculer. On a en effet

$$P_{A_a}(\lambda) = \det(\lambda I - A_a) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n,$$

comme on le voit par récurrence en développant la dernière colonne du déterminant (faire le calcul). Remarquons que les coefficients de ce polynôme sont les mêmes que ceux de l'équation (B.1), ce qui est très utile en pratique.

Une question naturelle est alors la suivante : étant donnée une équation différentielle linéaire autonome  $x' = Ax$ , peut-on la considérer comme issue d'une équation scalaire d'ordre  $n$ , quitte à effectuer un changement de coordonnées linéaire?

Reformulons la question : rappelons d'abord qu'un changement de coordonnées linéaire  $z = Px$ ,  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ , transforme l'équation  $x' = Ax$  en  $z' = PAP^{-1}z$ , c'est-à-dire que la matrice  $A$  définissant l'équation différentielle est remplacée par sa conjuguée  $PAP^{-1}$ . On dit d'ailleurs que  $z' = PAP^{-1}z$  est *conjuguée* à  $x' = Ax$  par  $P$ . La question ci-dessus devient ainsi : étant donnée une matrice  $A$  de polynôme caractéristique  $P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ , est-elle conjuguée à la matrice  $A_a$ ?

*Remarque B.1.* Notons que si  $A$  est conjuguée à une matrice  $A_a$ , toutes ses valeurs propres ont une multiplicité géométrique égale à 1. En effet, si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ , elle l'est aussi de  $A_a$ , avec la même multiplicité géométrique  $e = \dim \ker_{\mathbb{C}}(\lambda I - A_a)$ ; or

$$\lambda I - A_a = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & \lambda + a_1 \end{pmatrix}$$

est de rang  $n - 1$ , ses  $n - 1$  premières lignes étant clairement linéairement indépendantes, ce qui implique  $e = 1$ .

Il est alors clair que toute matrice ne peut être conjuguée à une matrice  $A_a$ . Prenons par exemple une matrice qui est diagonalisable et qui a des valeurs propres multiples ( $I$  par exemple!). La diagonalisabilité implique que les multiplicités algébriques et géométriques coïncident, c'est-à-dire que ces dernières ne sont pas toutes égales à 1. Une telle matrice ne peut donc pas être conjuguée à une matrice  $A_a$ .

Pour répondre à la question précédente, on introduit la notion de vecteur cyclique.

**Définition B.1.** *Un vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  tel que  $(v, Av, \dots, A^{n-1}v)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  s'appelle un vecteur cyclique pour  $A$ .*

Pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$ , la matrice  $A_a$  admet  $e_n$  pour vecteur cyclique (comme d'habitude,  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base standard de  $\mathbb{R}^n$ ) puisque :

$$\begin{aligned}
 A_a e_n &= e_{n-1} - a_1 e_n, \\
 A_a^2 e_n &= e_{n-2} + \text{combinaison linéaire de } (e_{n-1}, e_n), \\
 &\vdots \\
 A_a^{n-1} e_n &= e_1 + \text{combinaison linéaire de } (e_2, \dots, e_n).
 \end{aligned}$$

Remarquons par ailleurs que, si  $v$  est vecteur cyclique pour une matrice  $A$ , alors  $Pv$  est cyclique pour  $PAP^{-1}$ . Ainsi, si une matrice  $A$  est conjuguée à  $A_a$ ,  $A$  admet un vecteur cyclique.

**Proposition B.1.** *L'équation  $x' = Ax$  est conjuguée à une équation scalaire d'ordre  $n$  (c'est-à-dire que  $A$  est conjuguée à une matrice  $A_a$ ) si et seulement si  $A$  admet un vecteur cyclique.*

**Démonstration de la proposition B.1.** Soit  $A$  une matrice de polynôme caractéristique  $P_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$ . On a déjà montré plus haut que, si  $A$  est conjuguée à  $A_a$ , elle admet un vecteur cyclique. Il reste à montrer la réciproque : supposons donc que  $v$  soit un vecteur cyclique de  $A$ . On cherche à construire une base  $(f_1, \dots, f_n)$  dans laquelle  $A$  prend la forme  $A_a$ , ce qui est équivalent aux équations

$$\begin{cases} Af_n = f_{n-1} - a_1 f_n, \\ \vdots \\ Af_2 = f_1 - a_{n-1} f_n, \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

$$Af_1 = -a_n f_n. \quad (\text{B.3})$$

On sait d'autre part que  $f_n$  sera alors vecteur cyclique. Définissons donc les vecteurs  $f_n, \dots, f_1$  par  $f_n = v$  et

$$\begin{aligned}
 f_{n-1} &= Af_n + a_1 f_n, \\
 &\vdots \\
 f_1 &= Af_2 + a_{n-1} f_n,
 \end{aligned}$$

de façon que le système (B.2) soit vérifié. La famille  $(f_1, \dots, f_n)$  est génératrice puisque

$$\begin{aligned}
 \text{Vect}(f_n) &= \text{Vect}(v), \\
 \text{Vect}(f_n, f_{n-1}) &= \text{Vect}(v, Av), \\
 &\vdots \\
 \text{Vect}(f_n, f_{n-1}, \dots, f_1) &= \text{Vect}(v, Av, \dots, A^{n-1}v) \\
 &= \mathbb{R}^n,
 \end{aligned}$$

et par conséquent c'est une base de  $\mathbb{R}^n$ . Il ne reste plus qu'à vérifier que (B.3) est satisfaite. Calculons successivement

$$\begin{aligned}
 Af_1 &= A^2 f_2 + a_{n-1} Af_n \\
 &= A^2 (Af_3 + a_{n-2} f_n) + a_{n-1} Af_n \\
 &= A^3 f_3 + a_{n-2} A^2 f_n + a_{n-1} Af_n \\
 &\vdots \\
 &= A^n f_n + a_1 A^{n-1} f_n + \dots + a_{n-1} Af_n.
 \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a  $A^n f_n + a_1 A^{n-1} f_n + \dots + a_n f_n = 0$ , ce qui implique  $A f_1 = -a_n f_n$ . La matrice  $A$  s'écrit donc sous la forme  $A_a$  dans la base  $(f_1, \dots, f_n)$ , ce qui prouve la proposition.  $\square$

*Remarque B.2.* On voit dans la preuve précédente que, pour tout vecteur cyclique  $v$  de  $A$ , on peut construire une base  $(f_1, \dots, f_n)$ , avec  $v = f_n$ , dans laquelle  $A$  est sous la forme  $A_a$ .

## B.2 Forme normale : cas $m = 1$

*Équations commandées d'ordre  $n$*

Ajoutons maintenant une commande à l'équation (B.1). On obtient ainsi une équation commandée scalaire d'ordre  $n$  linéaire et autonome :

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = u(t), \quad (\text{B.4})$$

où la commande  $u(\cdot)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . En posant  $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , cette équation s'écrit sous forme d'un système commandé dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$x' = A_a x + B u, \quad \text{où } B = e_n.$$

Ce système est commandable : en effet, on a vu dans la section précédente que  $B = e_n$  est un vecteur cyclique pour  $A_a$ , ce qui implique  $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{k-1}B) = n$ ; le critère de Kalman est donc satisfait.

On cherche maintenant à stabiliser cette équation par retour d'état proportionnel. On choisit donc une commande de la forme  $u = Kx$ , où  $K$  est une matrice ligne. En notant  $k = K^T \in \mathbb{R}^n$ , on a  $u = \sum_{i=1}^n k_i y^{(n-i)}$  et le système bouclé s'écrit comme une équation d'ordre  $n$

$$y^{(n)}(t) + (a_1 - k_1)y^{(n-1)}(t) + \dots + (a_n - k_n)y(t) = 0.$$

La matrice associée est  $A_a + BK = A_{a-k}$  de polynôme caractéristique  $P_{A_{a-k}}(\lambda) = \lambda^n + (a_1 - k_1)\lambda^{n-1} + \dots + (a_n - k_n)$ . Il est donc clair que l'on peut choisir comme on veut les coefficients de ce polynôme, donc ses valeurs propres. La procédure est très simple:

- choisir  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_{2s-1}, \lambda_{2s} = \bar{\lambda}_{2s-1}$  sont complexes et  $\lambda_{2s+1}, \dots, \lambda_n$  sont réels;
- former  $Q(\lambda) = \prod(\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_n$ ;
- poser  $k_i = a_i - b_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ .



On obtient ainsi une matrice  $A_a + BK$  dont les valeurs propres sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . En particulier le choix de valeurs propres à partie réelle  $< 0$  permet de stabiliser asymptotiquement le système.

Remarquons que si on prend, dans l'équation commandée (B.4), une commande comportant un terme en retour d'état de la forme  $u(t) = v(t) + a^T x(t)$ , l'équation devient :

$$y^{(n)} = v,$$

c'est-à-dire un pur intégrateur. Cette forme réduite s'appelle *la forme de Brunovsky* de (B.4).

*Lien avec la commandabilité : cas  $m = 1$*

Considérons un système commandé linéaire dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, \tau],$$

où  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathbb{R}^n$  et la commande  $u(\cdot)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Dans le même esprit que dans la section B.1, on se pose la question suivante : ce système peut-il être considéré, à changement de coordonnées près, comme une équation commandée d'ordre  $n$ ?

Remarquons d'abord qu'un changement de coordonnées linéaire  $z = Px$ ,  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ , transforme le système  $x' = Ax + Bu$  en  $z' = PAP^{-1}z + PBu$ . On dit que ces deux systèmes sont *des systèmes conjugués l'un à l'autre par  $P$* .

**Lemme B.1.** *Si le système  $x' = Ax + Bu$ , avec  $u(\cdot)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , est commandable, alors il est conjugué à une équation commandée d'ordre  $n$  : il existe  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $a \in \mathbb{R}^n$  tels que*

$$PAP^{-1} = A_a \quad \text{et} \quad PB = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Démonstration.** Puisque le système est commandable, il satisfait le critère de Kalman :  $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{k-1}B) = n$ . Le vecteur  $B$  est donc cyclique pour  $A$ .

D'après la proposition B.1,  $A$  est conjuguée à  $A_a$  et, d'après la remarque B.2, on peut choisir la matrice de changement de coordonnées  $P$  de façon à ce que ce  $PB$  soit le dernier vecteur de base dans les nouvelles coordonnées. Le lemme est donc démontré.  $\square$

On peut, en plus du changement de coordonnées de matrice  $P$ , modifier la commande en y ajoutant un retour d'état,  $u = v + Kx$ . Un choix adapté de  $K$  (précisément  $K = a^T P$  avec les notations de la proposition) met ainsi le système  $x' = Ax + Bu$  sous forme de Brunovsky.

**Corollaire B.1.** *Si le système  $x' = Ax + Bu$ , avec  $u(\cdot)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , est commandable, alors il existe un changement de coordonnées et de commande*

$$\begin{cases} z = Px, \\ u = v + Kx, \end{cases} \quad P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad K \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{R}),$$

qui met le système sous forme de Brunovsky

$$y^{(n)} = v,$$

où  $z = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$ .

### B.3 Forme normale : cas général

Généralisons maintenant ce qui précède au cas où l'entrée  $u$  n'est plus de dimension un. On considère donc un système dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, \tau],$$

où  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$  et la commande  $u(\cdot)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ .

**Théorème B.1.** *Soit un système commandé  $x' = Ax + Bu$  dans  $\mathbb{R}^n$  dont la commande  $u$  est de dimension  $m$ . Supposons que le système est commandable et que  $\text{rang}(B) = m$ . Alors ce système est conjugué à un système  $z' = \tilde{A}z + \tilde{B}u$  tel que :*

- $\tilde{A}$  est de la forme :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{a^1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{a^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{a^m} \end{pmatrix} + \tilde{B}\tilde{K}, \quad (\text{B.5})$$

où  $\tilde{K} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ , et, pour  $1 \leq i \leq m$ ,  $A_{a^i} \in \mathbb{M}_{n_i}(\mathbb{R})$  avec  $n_1 + \dots + n_m = n$ ;

- $\tilde{B}$  est de la forme :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{B}_m \end{pmatrix}, \quad \text{où } \tilde{B}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i}. \quad (\text{B.6})$$

**Corollaire B.2.** *Si le système  $x' = Ax + Bu$ , avec une commande  $u$  de dimension  $m$ , est commandable et si  $\text{rang}(B) = m$ , alors il existe un changement de coordonnées et de commande*

$$\begin{cases} z = Px, \\ u = v + Kx, \end{cases} \quad P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}),$$

qui met le système sous forme de Brunovsky

$$y_1^{(n_1)} = v_1, \dots, y_m^{(n_m)} = v_m,$$

où  $z = (y_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(n_m-1)})$ .

**Démonstration du corollaire.** D'après le théorème B.1, il existe un changement de coordonnées  $z = Px$  tel que le système s'écrit en coordonnées  $z$  comme  $z' = \tilde{A}z + \tilde{B}u$ . En prenant une commande de la forme  $u = w - \tilde{K}z$ , on obtient  $m$  systèmes découplés à une commande :

$$z_i' = A_{a^i} z + \tilde{B}_i w_i, \quad z_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Il suffit alors de prendre  $w_i = v_i + (a^i)^T z_i$  pour conclure. □

Prouvons maintenant le théorème.

**Démonstration du théorème B.1.** Soient  $(v_1, \dots, v_m)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  formant une base de  $\text{Im } B$ . Considérons les matrices

$$C_k = (B \ AB \ \dots \ A^{k-1}B) \in \mathbb{M}_{n,km}(\mathbb{R}), \quad k = 1, \dots, n.$$

En particulier,  $C_1 = B$  et  $C_n$  est la matrice de commandabilité, qui est de rang  $n$  puisque le système  $x' = Ax + Bu$  est supposé commandable. Remarquons que  $\text{Im } C_{k+1} = \text{Im } C_k + A \text{Im } C_k$ . Quitte à réordonner les vecteurs  $v_1, \dots, v_m$ , on peut donc trouver une suite d'entiers positifs,

$$m_1 = m \geq \dots \geq m_n \geq m_{n+1} = 0,$$

tels que, pour tout  $k = 1, \dots, n$ , les vecteurs

$$v_1, \dots, v_{m_1}, Av_1, \dots, Av_{m_2}, \dots, A^{k-1}v_1, \dots, A^{k-1}v_{m_k}, \tag{B.7}$$

forment une base de  $\text{Im } C_k$ . Associons à tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  l'entier  $n_i$  tel que  $m_{n_i+1} < i \leq m_{n_i}$ . Les vecteurs  $v_i, \dots, A^{n_i-1}v_i$  font partie de la base (B.7) de  $\text{Im } C_n$  et

$$A^{n_i}v_i = \sum_{k=1}^{n_i+1} \sum_{j=1}^{m_k} a_{k,j}^i A^{k-1}v_j.$$

Définissons alors, pour  $i = 1, \dots, m$ , les vecteurs  $f_{n_i}^i, \dots, f_1^i$  par  $f_{n_i}^i = v_i$  et

$$f_l^i = A^{n_i-l}v_i - \sum_{k=l+1}^{n_i} \sum_{j=1}^{m_k} a_{k,j}^i A^{k-1-l}v_j, \quad l = 1, \dots, n_i - 1.$$

Remarquons d'abord que l'ensemble des vecteurs  $f_l^i$  ainsi construits forme une base de  $\mathbb{R}^n$ . De plus, leurs images par  $A$  vérifient :

$$\begin{cases} Af_{n_i}^i = f_{n_i-1}^i + \text{combinaison linéaire de } (f_{n_1}^1, \dots, f_{n_m}^m), \\ \vdots \\ Af_1^i = f_1^i + \text{combinaison linéaire de } (f_{n_1}^1, \dots, f_{n_m}^m), \end{cases}$$

$$Af_1^i = \text{combinaison linéaire de } (f_{n_1}^1, \dots, f_{n_m}^m).$$

Puisque  $f_{n_1}^1, \dots, f_{n_m}^m$  est une base de  $\text{Im } B$ , on obtient que, dans la base

$$f_1^1, \dots, f_{n_1}^1, \dots, f_1^m, \dots, f_{n_m}^m,$$

le système  $x' = Ax + Bu$  s'écrit sous la forme  $z' = \tilde{A}z + \tilde{B}u$ . □

## B.4 Démonstration du théorème 6.7 de placement des pôles

Considérons d'une part un système dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \text{où } u(\cdot) \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}^m,$$

que nous supposons commandable, et d'autre part un réel  $\rho$ .

Remarquons d'abord que, si  $\text{rang}(B) = s < m$ , il existe une matrice  $G \in \mathbb{M}_{m,s}(\mathbb{R})$  telle que  $BG$  soit de rang  $s$ . En particulier, ceci implique que

$$\text{rang}(BG \ ABG \ \dots \ A^{n-1}BG) = \text{rang}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B).$$

En se limitant aux commandes de la forme  $u(\cdot) = G\tilde{u}(\cdot)$ , où  $\tilde{u}(\cdot)$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^s$ , on se ramène à étudier le système

$$x' = Ax + BG\tilde{u},$$

qui est également commandable. Quitte à faire cette réduction, nous supposons donc dans la suite que le rang de  $B$  est égal à la dimension  $m$  de la commande  $u$ .

D'après le corollaire B.2, il existe un changement de coordonnées et de commande

$$\begin{cases} z = Px, \\ u = v + Kx, \end{cases} \quad P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad K \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R}),$$

qui met le système sous forme de Brunovsky

$$y_1^{(n_1)} = v_1, \dots, y_m^{(n_m)} = v_m,$$

où  $z = (y_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(n_m-1)})$ . Pour chaque indice  $i \in \{1, \dots, m\}$ , choisissons la commande  $v_i$  sous la forme :

$$v_i = -k_1^i y_1^{(n_1-1)} - \dots - k_{n_1-1}^i y_1,$$

où les coefficients  $k_1^i, \dots, k_{n_1-1}^i$  sont choisis de façon à ce que le polynôme

$$\lambda^{n_i} + k_1^i \lambda^{n_i-1} + \dots + k_{n_i-1}^i,$$

n'ait que des valeurs propres à partie réelle inférieure à  $\rho$  (on peut choisir les coefficients du polynôme selon la procédure page 184). Remarquons que la commande ainsi construite est de la forme  $v = K'z$ .

En résumé, on a construit une commande  $u = \tilde{K}x$ , où  $\tilde{K} = K'P + K$ , telle que la matrice  $A + B\tilde{K}$  est conjuguée par  $P$  à la matrice :

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} A_{k^1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{k^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{k^m} \end{pmatrix}$$

dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle inférieure à  $\rho$  puisque son polynôme caractéristique est :

$$P_{\tilde{A}_k} = (\lambda^{n_1} + k_1^1 \lambda^{n_1-1} + \dots + k_{n_1-1}^1) \dots (\lambda^{n_m} + k_1^m \lambda^{n_m-1} + \dots + k_{n_m-1}^m).$$

Le théorème 6.7 est démontré.



---

## Bibliographie

1. N. Bourbaki. *Espaces Vectoriels Topologiques: Chapitres 1 a 5*. Hermann, 1953.
2. H. Cartan. *Calcul Différentiel: I-Calcul Différentiel Dans Les Espaces De Banach; II-Equations Différentielles (Cours De Mathématiques II)*. Hermann & Cie, Editeurs, 1967.
3. P. G. Ciarlet. *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle Et Optimisation*. Masson, 1988.
4. P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, 1964.
5. M. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, London, 1974.
6. F. Laudenbach. *Calcul Différentiel et Intégral*. Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2000.
7. E. D. Sontag. *Mathematical control theory: deterministic systems*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1990.
8. E. Trélat. *Contrôle optimal*. Mathématiques Concrètes. Vuibert, Paris, 2005. Théorie & applications.
9. C. Viterbo. *Systèmes Dynamiques et Équations différentielles*. École Polytechnique, 2004.





# Index

## Notations

$D^k f(a)$ .....	9
$Df(a)$ .....	1
$E^s, E^u, E^c$ .....	38
$E_i$ .....	34
$I_x$ .....	89
$L(E, F)$ .....	1
$L^\infty([\sigma, \tau], U)$ .....	145
$L_c(E, F)$ .....	14, 175
$P_A(\lambda)$ .....	29
$R_A(t, s)$ .....	62
$\Gamma_{\lambda_i}$ ou $\Gamma_i$ .....	30
$\Gamma^s, \Gamma^u, \Gamma^c$ .....	39
$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ .....	2
$\Phi_t(v, u(\cdot))$ .....	146
$\Pi_{\lambda_i}$ ou $\Pi_i$ .....	30
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\partial_{x_i}$ .....	3
$GL_n(\mathbb{R})$ .....	2
$\nabla V(x)$ .....	123
$\mathcal{O}_x$ .....	90
$\ \cdot\ _{C^0}, \ \cdot\ _{C^1}$ .....	14
$\ \cdot\ _{E, F}$ .....	175
$\phi_t(x), \phi(t, x)$ .....	89
$t_-, t_+$ .....	85
$\mathcal{A}(\tau, x_0)$ .....	148
$\mathcal{I}_\tau$ .....	153
$\text{End}(E)$ .....	30

## A

application	
$k$ fois différentiable .....	8
continue .....	173
contractante .....	7, 20, 175
de classe $C^1$ .....	5
de classe $C^k$ .....	9

de Poincaré .....	98
différentiable .....	1, 15
différentiable sur un ouvert .....	5
lipschitzienne .....	7, 175
localement lipschitzienne .....	83
automatique .....	143

## B

bassin d'attraction .....	125
bloc de Jordan .....	32
boucle fermée .....	154
boucle ouverte .....	154

## C

champ de gradient .....	123
champ de vecteurs .....	81
complet .....	87
changement de coordonnées .....	27, 110, 182
commandabilité .....	148
commutateur de matrices .....	55
critère de Kalman .....	149, 153

## D

dérivée	
directionnelle .....	3
partielle .....	3, 7
difféomorphisme .....	12
différentielle .....	1
$k$ -ème .....	9
d'une composition .....	5
de l'inverse .....	2
partielle .....	12
seconde .....	8
distance .....	173
durée de vie d'une solution .....	86

- E**
- ensemble
    - atteignable ..... 148
    - invariant ..... 141
    - positivement invariant ..... 125, 141
  - entrée ..... 143
  - équation différentielle
    - affine ..... 68
    - autonome ..... 81
    - linéaire ..... 59
    - linéaire autonome ..... 25
    - non autonome ..... 82
    - scalaire ..... 25, 62
    - scalaire d'ordre  $n$  ..... 181
  - équation linéarisée ..... 95
  - équilibre ..... 117, 147
    - asymptotiquement stable ..... 118
    - globalement asymptotiquement stable ..... 125
    - hyperbolique ..... 122
    - stable ..... 117
  - espace
    - d'inobservabilité ..... 153
    - de Banach ..... 14, 174
    - indifférent ..... 38
    - instable ..... 38
    - stable ..... 38
  - espace métrique ..... 173
    - complet ..... 173
  - espaces vectoriels normés ..... 174
  - état atteignable ..... 148
  - explosion en temps fini ..... 87
  - exponentielle de matrice ..... 15, 27
- F**
- flot ..... 89
  - fonction de Lyapunov ..... 124
    - stricte ..... 124
  - forme de Brunovsky ..... 185–187
  - forme de Jordan ..... 32
  - formule
    - de Taylor ..... 9, 15
    - du flot ..... 89
- G**
- gradient ..... 123
- H**
- homéomorphisme ..... 12
- L**
- lemme de Gronwall ..... 87
- loi de commande ..... 144
- M**
- matrice
    - de commandabilité ..... 149
    - diagonalisable ..... 29, 31, 41
    - hyperbolique ..... 40
    - jacobienne ..... 4
    - nilpotente ..... 30
  - modèle prédateur-proie ..... 101
  - multiplicité
    - algébrique ..... 29
    - géométrique ..... 30, 32
- N**
- norme
    - $\|\cdot\|_{C^0}$  ..... 14
    - $\|\cdot\|_{C^1}$  ..... 14
    - d'opérateur ..... 6, 14, 174
- O**
- observabilité ..... 152
  - orbite ..... 90
    - instable ..... 122
    - périodique ..... 90
    - stable ..... 122
- P**
- planification des trajectoires ..... 150
  - polynôme caractéristique ..... 29
  - portrait de phase ..... 43, 90
  - problème de Cauchy ..... 82
- R**
- réduction de Jordan
    - complexe ..... 31
    - réelle ..... 34
  - résolvante ..... 62
  - redressement ..... 110
  - retour d'état ..... 154
- S**
- solution
    - d'une équation commandée ..... 146
    - d'une équation différentielle autonome .. 81
    - d'une équation différentielle linéaire .... 59
    - maximale ..... 85
  - sortie ..... 143
  - sous-espace
    - caractéristique ..... 30
    - caractéristique réel ..... 34

propre .....	30	de Jordan .....	31
suite de Cauchy .....	14, 173	de Liouville .....	64
système		de placement des pôles .....	155
asymptotiquement stabilisable .....	155	de Schwarz .....	8, 15
bouclé .....	155	des accroissements finis .....	5, 15
commandé .....	144	des fonctions implicites .....	12, 179
commandable .....	149	du point fixe de Picard .....	176
linéarisé .....	147	topologie .....	173
observable .....	153		
système fondamental de solutions .....	63		
<b>T</b>		<b>V</b>	
théorème		valeur propre .....	29
d'existence et unicité globales .....	60	variation de la constante .....	68
d'inversion locale .....	11, 177	vecteur	
de Banach .....	177	cyclique .....	182
de Cauchy-Lipschitz .....	82	propre .....	29
de Cayley-Hamilton .....	30	vitesse .....	2
de décomposition des noyaux .....	30	<b>W</b>	
de Floquet .....	70	wronskien .....	64